Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 25/07/2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA... | | | | | | |

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 25/07/2015

1) Si determini la fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matrice con $\rho(A) = \frac{7}{5}$.
Dire se le seguenti affermazioni possono essere o non essere verificate.

a) $\|A\|_1 = 3/2$.

b) $\|A\|_\infty = 1.2$.

c) $\rho(A^2) = 49/25$.

d) $\rho(A^{-1}) = 4/7$.

3) Indicare i valori reali K per i quali l'equazione

$$x^2 + x - Ke^x = 0$$

ha soluzioni reali di molteplicità superiore a uno.

4) Determinare i valori reali α e β per i quali risulta minimo il grado del polinomio che interpola i dati della tabella

x	0	α	2	3	4
y	1	4	7	β	29

Indicare il polinomio ottenuto.

5) Si vuole applicare la *formula dei trapezi* per approssimare l'integrale

$$I = \int_0^1 \cos(x)dx$$

con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-3}$.
Si determini il minimo numero di intervalli in cui suddividere $[0,1]$ per poter soddisfare la richiesta.

Soluzione

1) La fattorizzazione richiesta è data da

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Le affermazioni a) e c) sono vere o realizzabili mentre risulta impossibile che si verifichino le affermazioni b) e d).

3) Posto $f(x) = x^2 + x - Ke^x$, basta imporre che siano contemporaneamente verificate le equazioni $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$.
Si ottiene che questo risulta verificato se $x^* = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ e $K = \frac{2x^*+1}{e^{x^*}}$.

4) Escludendo dalla tabella i due punti che coinvolgono α e β, si ottiene il polinomio di interpolazione $P_4(x) = 2x^2 - x + 1$.
Per non essere costretti ad elevare il grado di tale polinomio basta scegliere $\beta = P_4(3) = 16$ e α tra le soluzioni dell'equazione $2x^2 - x - 3 = 0$ che sono $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.5$.

5) La derivata seconda della funzione integranda è $f'' = -\cos(x)$ per cui il suo valore assoluto sull'intervallo di integrazione può essere maggiorato con 1.
Indicato con m il numero di intervalli necessari, tale valore deve soddisfare la disequazione $\frac{(b-a)^3}{12m^2}|f''(x)| \leq \frac{10^{-3}}{2}$ (si deve tenere conto degli errori che si commetteranno nel calcolo effettivo della approssimazione dell'integrale). Ne segue

$$m \geq 13 .$$