Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 29/07/2013

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 29/07/2013

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x, y) = x \cdot y$$

nel punto $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{5})$ ($\sqrt{2} = 1.414213\ldots$, $\sqrt{5} = 2.236067\ldots$).
Si indichi un insieme di indeterminazione a cui appartiene P_0.
Supponendo di commettere un errore assoluto algoritmico $|\delta_a| \leq 10^{-2}$ e di introdurre i dati con errori assoluti $|\delta_x| \leq 10^{-2}$ e $|\delta_y| \leq 10^{-2}$, quale sarà il massimo errore assoluto $|\delta_f|$?

2) Una matrice $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ ha autovalori $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = \sqrt{2}$.
Dire se le seguenti affermazioni sono vere:

a) A è convergente;

b) A^2 è convergente;

c) A^{-1} è convergente;

Infine, determinare, se esistono, valori $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice αA^2 risulta convergente.

3) Determinare i valori reali α per i quali il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ha soluzione unica nel senso dei minimi quadrati.

4) L'equazione

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

ha soluzioni $\alpha_1 = 1 - \sqrt{2}$, $\alpha_2 = 1 + \sqrt{2}$ e $\alpha_3 = 1$.
Se si applica il metodo di Newton per approssimare tali soluzioni, quali ordini di convergenza si hanno?

5) Calcolare i pesi a_0, a_1 e a_2 della formula di quadratura

$$J_2(f) = a_0 f(0) + a_1 f(3/2) + a_2 f(1)$$

che approssima l'integrale $I(f) = \int_{-1}^{2} f(x)dx$ in modo da avere il massimo grado di precisione. Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Il punto P_0 appartiene, per esempio, all'insieme di indeterminazione $D = [1, 2] \times [2, 3]$.
Risultando $A_x = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 3$ e $A_y = \sup_{(x,y)\in D} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 2$, si ha

$$|\delta_f| \leq |\delta_a| + A_x|\delta_x| + A_y|\delta_y| = 10^{-2} + 3 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-2} = 6 \times 10^{-2}\,.$$

Assumendo, per esempio, $P_1 = (1.41, 2.23)$ si ha $f(P_1) = 3.14$ e $f(P_0) = 3.162277\ldots$.

2) Le matrici A e A^2 non sono convergenti avendo raggio spettrale maggiore di 1. La matrice A^{-1} risulta convergente essendo $\rho(A^{-1}) = 1/\sqrt{2}$.
La matrice αA^2 è convergente se $|\alpha| < 1/4$.

3) La matrice dei coefficienti risulta di rango massimo (cioè 2) per ogni valore reale di α per cui la soluzione nel senso dei minimi quadrati del sistema proposto è unica $\forall\alpha \in \mathbb{R}$.

4) Gli ordini di convergenza del metodo di Newton sono i seguenti:

$$\begin{cases} \alpha_1 \Longrightarrow p = 2 \\ \alpha_2 \Longrightarrow p = 2 \\ \alpha_3 \Longrightarrow p \geq 3 \end{cases}$$

5) Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2$, si ottengono i pesi

$$a_0 = \frac{5}{2}, \qquad a_1 = 2, \qquad a_2 = -\frac{3}{2}.$$

Il grado di precisione è $m = 2$ poiché si ha $E_2(x^3) \neq 0$.