Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 02/07/2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA... | | | | | | |

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 02/07/2016

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}\ .$$

2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è riducibile. Determinare una matrice di permutazione P che riduce la matrice data.

3) È data l'equazione

$$e^{-x} + Kx^2 = 0\,, \quad K \in \mathbb{R}\,.$$

Calcolare i vaolri reali K per i quali l'equazione ha radici di molteplicità maggiore di uno indicando i valori di tali radici.

4) Data la tabella di valori

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 2 & -2 & \alpha & 5 \\ \hline f(x) & \alpha & 0 & 8 & 3 & 15 \end{array}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

determinare i valori reali α per i quali il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo.

5) Si vuole approssimare l'integrale $I(f) = \int_0^1 \frac{2}{1+2x} dx$ utilizzando la formula dei trapezi.
In quanti sottointervalli si deve dividere l'intervallo di integrazione per avere una approssimazione con un errore massimo $E \le 10^{-2}$?

Soluzione

1) Seguendo l'algoritmo

$$r_1 = x^2 \,, \quad r_2 = x + y \,, \quad r_3 = r_1/r_2$$

si ha

$$\epsilon_f = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \frac{x+2y}{x+y}\epsilon_x - \frac{y}{x+y}\epsilon_y \,.$$

2) Una matrice che riduce A è $P = \{e^{(1)}|e^{(5)}|e^{(3)}|e^{(4)}|e^{(2)}\}$.

3) Le radici di molteplicità maggiore di uno sono le soluzioni del sistema dato dalle equazioni $f(x) = 0$ e $f'(x) = 0$.
Si ricava che esiste una unica soluzione di molteplicità maggiore di uno data da $\alpha = -2$. Tale radice si ottiene se $K = -\frac{e^2}{4}$.

4) Dal quadro delle differenze divise si ottiene che le differenze divise del secondo ordine sono uguali fra loro se $\alpha = -1$.

5) Da $f(x) = 2(1+2x)^{-1}$ si ottiene $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 16$. Imponendo che l'errore della formula dei trapezi sia minore di $10^{-2}/2$ si ha

$$\frac{(b-a)^3 M_2}{12L^2} \le \frac{10^{-2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{16}{12L^2} \le \frac{10^{-2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad L \ge 17 \,.$$