Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 04/07/2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica   04/07/2015

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y}{x} \,.$$

2) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3i & 1/2 & 1/2 \\ -i & 4 & 2i \\ -1/2 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$

a) La matrice A ha 3 (tre) autovalori distinti?

b) La matrice ha un autovalore $\lambda = 0$?

3) È data l'equazione

$$x^2 - 1 - \cos(x) = 0 \,.$$

Indicare il numero delle radici reali dell'equazione data individuando anche intervalli di separazione di tali radici.

4) Risolvere nel senso dei minimi quadrati il sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_3(f) = \frac{1}{4}\left(f(-1) + 3f(-1/3) + 3f(1/3) + f(1)\right) \,.$$

Determinare il grado di precisione m della formula data.
Nell'ipotesi che l'errore sia esprimibile come $E_1(f) = Kf^{(s)}(\xi)$, determinare K e s.

Soluzione

1) Considerando l'algoritmo

$$r_1 = y/x\,, \qquad r_2 = x - r_1\,,$$

si ottiene l'espressione dell'errore relativo

$$\epsilon_f = -\frac{y}{x^2 - y}\epsilon_1 + \epsilon_2 + \frac{x^2 + y}{x^2 - y}\epsilon_x - \frac{y}{x^2 - y}\epsilon_y\,.$$

2) I cerchi di Gerhgorin relativi alla matrice A sono due a due disgiunti per cui si hanno tre autovalori distinti.
All'unione dei tre cerchi non appartiene l'origine degli assi del piano di Gauss per cui $\lambda = 0$ non può essere autovalore di A.

3) L'equazione data ha 2 (due) soluzioni $\alpha_1 \in]-\pi/2, -1[$ e $\alpha_2 \in]1, \pi/2.[$

4) Si ha il sistema delle "equazioni normali" $A^T A x = A^t b$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione è $(x_1, x_2)^T = (4/7, -5/14)^T$.

5) La formula data ha grado di precisione $m = 3$ (risulta esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ mentre si ha $E_3(x^4) = -\frac{16}{135}$). Ne segue che $s = 4$ e $K = -\frac{2}{405}$.