Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 11/06/2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 11/06/2016

1) Si vuole calcolare la funzione

$$f(x,y) = x - y$$

in un punto $P_0 \in [1,2] \times [2,3]$.
Si suppone di commettere un errore algoritmico $|\delta_a| \leq \frac{1}{2}10^{-2}$ e di introdurre i valori x e y con errori $|\delta_x| \leq 10^{-2}$ e $|\delta_y| \leq 10^{-2}$.
Quale è il massimo errore assoluto $|\delta_f|$?

2) Un sistema lineare $Ax = b$ ha matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,.$$

Per quali valori reali α converge il metodo iterativo di Jacobi per risolvere tale sistema?

3) Determinare i punti fissi reali della funzione

$$\phi(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x}\,.$$

4) Data la tabella di valori

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0	1	1	-1	1

,

determinare la retta $y = a + bx$ che approssima la funzione $f(x)$ nel senso dei minimi quadrati.

5) Si approssima l'integrale $I(f) = \int_{-1}^{1} e^x f(x)dx$ con la formula

$$J_1(f) = a_0 f(-1) + a_1 f(1).$$

Determinare i pesi a_0 e a_1 in modo da ottenere la formula con grado di precisione massimo.
Indicare il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Risultando $\frac{\partial f}{\partial x} = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$ si ha

$$|\delta_f| \leq |\delta_a| + |\delta_x| + |\delta_y| = \frac{5}{2} 10^{-2} \,.$$

2) La matrice di iterazione di Jacobi è

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} .$$

Gli autovalori di H_J sono

$$\lambda_1 = 0 \,, \quad \lambda_2 = \alpha\sqrt{2} \,, \quad \lambda_3 = -\alpha\sqrt{2}$$

per cui il metodo risulterà convergente se $|\alpha| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Ponendo $x = \phi(x)$ e risolvendo tale equazione si ottiene un unico punto fisso (reale) $\alpha = 1$.

4) Posto

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \,,$$

si risolve il sistema lineare $A^T A x = A^T b$ dove $x = (a, b)^T$. Tale sistema è dato da

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e la sua soluzione è $(\frac{2}{5}, 0)^T$. L'equazione della retta cercata è $y = \frac{2}{5}$.

5) Imponendo che formula proposta risulti esatta per $f(x) = 1, x$ si ottiene

$$a_0 = \frac{e^2 - 3}{2e} \,, \quad a_1 = \frac{e^2 + 1}{2e} \,.$$

Risultando $E(x^2) = -\frac{4}{e}$ si deduce che il grado di precisione risulta $m = 1$.