Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 13/06/2012

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 13/06/2012

1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x - y}{z} .$$

2) Determinare i punti fissi della funzione

$$h(x) = x - e^x + K ,$$

al variare del numero reale K.

3) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1+3i & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3i \\ -2 & 3i & 6 \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{pmatrix} .$$

a) La matrice A è hermitiana?

b) Il metodo di Jacobi risulta convergente?

c) Il metodo di Gauss-Seidel risulta convergente?

4) Determinare il numero reale α per il quale risulta di grado minimo il polinomio di interpolazione relativo ai seguenti dati:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	α	7	13	21

5) Si consideri la formula di quadratura

$$J_1(f) = f(1) + f(3)$$

che approssima l'integrale $\int_1^3 f(x)dx$.
Supposto che l'errore sia esprimibile nella forma $E_1(f) = Kf^{(m)}(\xi)$, determinare K ed m.

Soluzione

1) Per il calcolo di $f(x,y)$ seguiamo l'algoritmo

$$r_1 = x - y \ , \qquad r_2 = r_1/z \ .$$

L'errore relativo nel calcolo della funzione è

$$\epsilon_f = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_x \frac{x}{x-y} - \epsilon_y \frac{y}{x-y} - \epsilon_z \ .$$

2) Si risolve l'equazione $x = h(x)$ ottenendo un unico punto fisso per i valori $K > 0$ dato da

$$\alpha_1 = \log K \ .$$

3) La matrice data non risulta simmetrica (per esempio, la diagonale non ha tutti valori reali).
I metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel sono convergenti poiché la matrice A ha predominanza diagonale forte.

4) Calcolando il polinomio di interpolazione escludendo il punto $(1, \alpha)$ si ottiene $P_3(x) = x^2 + x + 1$. Il valore di α cercato è

$$\alpha = P_3(1) = 3 \ .$$

5) La formula data ha grado di precisione 1 (si tratta della formula trapezoidale) con $E_1(x^2) = -4/3$. Si ha quindi $m = 2$ e $k = -2/3$.