Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Elettronica, Informatica, Nucleare... 28/06/2011

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Elettronica, Informatica, Nucleare... 28/06/2011

1) Determinare l'espressione dell'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y} \, .$$

2) Determinare i punti fissi della funzione

$$h(x) = \frac{10 + 5x - x^3}{2x} \, .$$

3) Una matrice $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ ha autovalori

$$\lambda_1 = -10, \; \lambda_2 = -5, \; \lambda_3 = -1, \; \lambda_4 = 1, \; \lambda_5 = 3, \; \lambda_6 = 7.$$

Calcolare $\rho(A)$, $\rho(A^{-1})$ e $\rho(A^2)$.
La matrice A^{-1} verifica le ipotesi per la convergenza del metodo delle potenze?

4) È data la funzione

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \, .$$

Quale grado hanno i polinomi di interpolazione se si considerano, rispettivamente, 3, 4 o 5 coppie di valori $(x_i, f(x_i))$? (Si supponga che i valori x_i siano due a due distinti)

5) Determinare il peso a ed il nodo x_0 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_0^1 x\, f(x)\, dx = a f(x_0) + E_0(f)$$

abbia grado di precisione massimo.
Si indichi il grado di precisione ottenuto.

Soluzione

1) Per il calcolo di $f(x, y)$ seguiamo l'algoritmo

$$r_1 = xy \,, \qquad r_2 = x + y \,, \qquad r_3 = r_1/r_2 \,.$$

L'errore relativo nel calcolo della funzione è

$$\epsilon_f = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_x \frac{y}{x+y} + \epsilon_y \frac{x}{x+y} \,.$$

2) Si risolve l'equazione $x = h(x)$ ottenendo i punti fissi

$$\alpha_1 = -2 \,, \qquad \alpha_{2,3} = \pm\sqrt{5} \,.$$

3) Risulta

$$\rho(A) = 10 \,, \qquad \rho(A^{-1}) = 1 \,, \qquad \rho(A^2) = 100 \,.$$

La matrice A^{-1} non verifica le ipotesi di convergenza del metodo delle potenze avendo due autovalori di modulo massimo tra loro distinti $(1, -1)$.

4) Essendo la funzione da interpolare un polinomio di grado 3, il polinomio di interpolazione ottenuto con k coppie $(x_i, f(x_i))$ risulta di grado n con

$$\begin{array}{lcl} k = 3 & \Longrightarrow & n \leq 2 \\ k = 4 & \Longrightarrow & n = 3 \\ k = 5 & \Longrightarrow & n = 3 \end{array} \,.$$

5) Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1, x$ si ottiene $a = 1/2$ e $x_0 = 2/3$. La formula ha grado di precisione $m = 1$ essendo $E_0(x^2) \neq 0$.