Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica   31/01/2015

COGNOME ....   NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica   31/01/2015

1) Determinare una maggiorazione del valore assoluto dell'errore assoluto nel calcolo della funzione

$$f(x, y) = x \cdot y$$

nel punto $P_0 = (\pi, \sqrt{3})$ introducento π arrotondato alla seconda cifra decimale, $\sqrt{3}$ troncato alla quarta cifra decimale ed arrotondando il risultato alla terza cifra decimale.

2) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è riducibile.
Determinare una matrice di permutazione P che riporta la matrice A in forma triangolare inferiore a blocchi con blocchi diagonali quadrati.

3) Si consideri l'equazione

$$e^{-x} - x^2 - \frac{1}{2} = 0 \, .$$

Individuare un intervallo di separazione per ciascuna radice dell'equazione data dicendo anche se le condizioni di convergenza del metodo di bisezione sono verificate.

4) È dato il sistema lineare sovradeterminato $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \, , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \, , \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \, , \quad \alpha \in \mathbb{R} \, .$$

Calcolare i valori reali α per i quali il sistema non ha una unica soluzione nel senso dei minimi quadrati.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_2(f) = af(-1/2) + bf(0) + cf(1/2) \, .$$

Determinare i pesi a, b e c che danno la formula con grado di precisione massimo indicando il grado di precisione raggiunto.

Soluzione

1) Ponendo $\pi \in [3,4]$ e $\sqrt{3} \in [1,2]$ si ha

$$|\delta_f| \leq |\delta_a| + A_x|\delta_x| + A_y|\delta_y| = \frac{1}{2} \times 10^{-3} + 2\,\frac{1}{2} \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-2} = 1.09 \times 10^{-2}\,.$$

2) La matrice A è trasformata nella sua forma ridotta utilizzando la matrice di permutazione $P = (e^{(4)}|e^{(2)}|e^{(3)}|e^{(1)})$.

3) L'equazione data una radice reale $\alpha_1 \in [0.01, 1]$. Le condizioni di convergenza del metodo di bisezione sono verificate essendo la funzione $f(x) = e^{-x} - x^2 - \frac{1}{2}$ continua nell'intervallo di separazione e cambiando di segno una sola volta nello stesso intervallo.

4) La matrice A ha rango 1 se e solo se $\alpha = 1$ e quindi solo per tale valore il sistema lineare ha infinite soluzioni nel senso dei minimi quadrati.

5) Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ e $f(x) = x^2$ si ottiene il sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} a + b + c & = & 2 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c & = & 0 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}c & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

da cui si ricava $a = c = \frac{4}{3}$ e $b = -\frac{2}{3}$.
La formula ottenuta risulta esatta per $f(x) = x^3$ ma non per $f(x) = x^4$ per cui il grado di precisione è $m = 3$.