Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 17/01/2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 17/01/2015

1) Si determini l'errore relativo nel calcolo della funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x+y} \, .$$

2) Dire se le seguenti affermazioni sono vere o sono false.

a) $\|A\|_2 < 2 \Longrightarrow \rho(A) < \sqrt{2}$;

b) $\|A\|_\infty^2 < 2 \Longrightarrow \rho(A) < \sqrt{2}$;

c) $A = A^H \Longrightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$;

d) $A = A^H \Longrightarrow \|A\|^2 \leq \|A^2\|$.

3) Calcolare le soluzioni dell'equazione

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

indicando per ciascuna di esse l'ordine con cui converge il metodo di Newton se applicato per la loro approssimazione.

4) Data la tabella di valori

$$\begin{array}{c|rrrrr} x & 0 & 1 & -2 & \beta & -1 \\ \hline y & -1 & \alpha & 3 & 3 & 0 \end{array} \, , \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, ,$$

determinare i valori dei parametri reali α e β che rendono minimo il grado del polinomio di interpolazione.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_0^1 f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_0(f) = a_0 f(x_0) \, .$$

Determinare il peso a_0 ed il nodo x_0 che danno la formula con grado di precisione massimo indicando il grado di precisione raggiunto.

Soluzione

1) Considerando l'algoritmo

$$r_1 = x + y\,, \quad r_2 = x^2\,, \quad r_3 = \frac{r_2}{r_1}\,,$$

si ottiene l'espressione dell'errore relativo

$$\epsilon_f = \epsilon_3 + \epsilon_2 - \epsilon_1 + \frac{x+2y}{x+y}\epsilon_x - \frac{y}{x+y}\epsilon_y\,.$$

2) a) e d) non sono vere mentre lo sono b) e c).

3) L'equazione ha soluzioni

$$\alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_{2,3} = -2\,.$$

Il metodo di Newton converge con ordine 2 nella approssimazione di α_1 mentre ha ordine 1 se si approssima α_2.

4) Dal quadro delle differenze divise si ricava che il polinomio che interpola i dati che non coinvolgono α e β è $P(x) = x^2 - 1$. Da questo si ricavano

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 2\,.$$

5) Imponendo che la formula sia esatta per $f(x) = 1$ e $f(x) = x$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_0 x_0 &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

da cui si ricava $a_0 = 1$ e $x_0 = \frac{1}{2}$.
La formula ottenuta non risulta esatta per $f(x) = x^2$ per cui il grado di precisione è $m = 1$.