Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 28/02/2013

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate e tutto deve essere scritto a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica 28/02/2013

1) Si hanno la funzione
$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$
ed i valori $x_0 \in]0.2, 0.3[$ e $y_0 \in]0.5, 0.6[$.
Determinare, in valore assoluto, il massimo errore assoluto trasmesso dai dati che si può ottenere nel calcolo di $f(x_0, y_0)$.

2) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

3) Un sistema lineare $Ax = b$ ha matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \alpha \in \mathbb{R} \diagdown \{0\} .$$

a) Per quali valori reali di α converge il metodo di Jacobi?

b) Per quali valori reali di α converge il metodo di Gauss-Seidel?

4) È data l'equazione
$$x^4 - K(x+2) = 0 , \quad K \in \mathbb{R} .$$
Determinare i valori reali di K per i quali l'equazione data ha soluzioni di molteplicità maggiore di 1.

5) Per approssimare l'integrale $I = \int_0^4 f(x)dx$ si utilizza la formula di quadratura

$$J_3(f) = \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{3}{4}f\left(\frac{8}{3}\right) + \frac{1}{4}f(4) .$$

Determinare il grado di precisione della formula proposta.

Soluzione

1) Ponendo $D =]0.2, 0.3[\times]0.5, 0.6[$ risulta

$$\sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 2\,, \qquad \sup_{(x,y)\in D}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \frac{6}{5}\,,$$

si ha

$$|\delta_d| \le 2\cdot 0.1 + \frac{6}{5}\cdot 0.1 = \frac{8}{25}\,.$$

2) Si ha

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\,, \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

3) Si ha

$$H_J = -\begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \qquad H_{GS} = -\begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 1 \\ 0 & -1/\alpha & -1 \\ 0 & -1/\alpha & -1 \end{pmatrix}\,.$$

Gli autovalori di H_J sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$ mentre gli autovalori di H_{GS} sono $\mu_{1,2} = 0$ e $\mu_3 = -\frac{\alpha+1}{\alpha}$.
Entrambi i metodi risultano convergenti se $\alpha < -\frac{1}{2}$.

4) Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^4 - K(x+2) & = & 0 \\ 4x^3 - K & = & 0 \end{cases}$$

si ottengono i valori degli zeri di molteplicità maggiore di 1 $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{8}{3}$ che corrispondono, rispettivamente, a $K_1 = 0$ e $K_2 = -\frac{2048}{27}$.

5) La formula proposta è non integra esattamente le costanti per cui non risulta adatta ad approssimare l'integrale dato.