Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica **22/02/2010**

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA...

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate ed i dati dello studente devono essere scritti a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica **22/02/2010**

1) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

ha un autovettore dato da $x = (2, -1, 1)^T$. Calcolare l'autovalore a cui è associato.

2) Indicare un intervallo reale a cui appartengono tutte le soluzioni reali dell'equazione

$$x^3 + x^2 + x + 2 = 0 .$$

3) Una matrice $A \in C^{4\times 4}$ ha raggio spettrale $\rho(A) = \frac{2}{3}$. Tale matrice può avere il polinomio caratteristico dato da

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 \,?$$

4) Determinare i pesi a_0 e a_1 affinché la formula

$$J_1(f) = a_0 f\left(-\frac{2}{3}\right) + a_1 f\,(1)$$

che approssima $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ sia di tipo interpolatorio.

5) La successione di polinomi

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - 2x^2 + x + 3 \\ P_1(x) &= 3x^2 - 4x + 1 \\ P_2(x) &= -x + 1 \\ P_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

è una successione di Sturm associata all'equazione $P_0(x) = 0$?

Soluzione

1) Conoscendo l'autovettore x della matrice A si ha

$$\lambda = \frac{x^H A x}{x^H x} = 7 \,.$$

2) Applicando il primo teorema di Gershgorin alla matrice di Frobenius

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

si ottiene l'intervallo reale $[-4, 2]$.

3) La matrice in questione non può avere il polinomio caratteristico dato poiché il prodotto degli autovalori, tutti di modulo minore o uguale a $2/3$, dovrebbe essere uguale a 2.

4) La formula di quadratura è di tipo interpolatorio se i pesi verificano le relazioni $a_i = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx$, $i = 0, 1$. Da $l_0(x) = \frac{3}{5}(1 - x)$ e $l_1(x) = \frac{3}{5}(x + \frac{2}{3})$ si ottiene

$$a_0 = \frac{6}{5} \,, \qquad a_1 = \frac{4}{5} \,.$$

5) La successione proposta non risulta una successione di Sturm poiché, per esempio, risultano $V(-\infty) = 1$ e $V(+\infty) = 2$ in contrasto con la non crescenza della funzione $V(x)$.