Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica **02/02/2010**

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA... | | | | | | |

Risposte

1)

2)

3)

4)

5)

N.B. Le risposte devono essere giustificate ed i dati dello studente devono essere scritti a penna con la massima chiarezza.

Test di Calcolo Numerico

Ingegneria Informatica **02/02/2010**

1) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

calcolare il polinomio caratteristico della matrice A^2.

2) Indicare con quale ordine il metodo di Newton converge alle soluzioni della equazione

$$(x-2)^2\,(x-1)\,(x+1) \;=\; 0\,.$$

3) Una matrice hermitiana A ha autovalori $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -1$ e $\lambda_4 = -6$. Calcolare il numero di condizionamento $\mu_2(A)$.

4) Una formula di quadratura ha l'errore esprimibile nella forma

$$E_n(f) = -\frac{1}{3} f^{(V)}(\theta)\,.$$

Qual è il grado di precisione di tale formula?

5) Il sistema lineare sovradeterminato

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ha un'unica soluzione?

Soluzione

1) Gli autovalori della matrice A sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 5$. Segue che la matrice A^2 ha autovalori $\mu - 1 = \mu_2 = 1$ e $\mu_3 = 25$. Il suo polinomio caratteristico è

$$P(\lambda) = (-1)^3(\lambda - 1)^2(\lambda - 25) = -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 51\lambda + 25\,.$$

2) Le radici dell'equazione sono $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = -1$. Segue che l'ordine di convergenza del metodo di Newton risulta $p = 1$ per approssimare la radice α_1 di molteplicità 2 e di ordine di convergenza $p = 2$ per approssimare le due radici semplici α_3 e α_4.

3) Per le matrici hermitiane risulta $\mu_2(A) = \frac{\max_i |\lambda_i|}{\min_i |\lambda_i|}$ per cui $\mu_2(A) = \frac{6}{1} = 6$.

4) Il grado di precisione m della formula è uguale all'ordine della derivata che compare nella espressione dell'errore diminuito di 1 per cui $m = 4$.

5) Il sistema lineare sovradeterminato ha una unica soluzione (nel senso dei minimi quadrati) se la matrice dei coefficienti risulta di rango o caratteristica massima. Calcolando i determinanti dei minori di ordine 2 si vede che sono tutti nulli per cui $r(A) = 1$ e quindi il sistema non ammette una soluzione unica.