



1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcolare la matrice  $A^{-1}$  indicando per quali valori reali di  $\alpha$  esiste.
- b) Il metodo iterativo di Jacobi applicato ad un sistema lineare con matrice  $A$ , risulta convergente?
- c) La stessa domanda del punto precedente riferita al metodo di Gauss-Seidel.

2) Si hanno tre stanze comunicanti  $S_1, S_2, S_3$ . Si lancia quattro volte una moneta equilibrata e si conta quante volte è uscita testa ( $T$ ). Una persona passa da una stanza all'altra con il seguente criterio a seconda della stanza in cui si trova:

Stanza  $S_1$ : passa nella stanza  $S_3$  se  $T < 1$ , nella stanza  $S_2$  se  $T > 1$ , rimane dove si trova se  $T = 1$ ;

Stanza  $S_2$ : passa nella stanza  $S_1$  se  $T < 2$ , nella stanza  $S_3$  se  $T > 2$ , rimane dove si trova se  $T = 2$ ;

Stanza  $S_3$ : passa nella stanza  $S_2$  se  $T < 3$ , nella stanza  $S_1$  se  $T > 3$ , rimane dove si trova se  $T = 3$ .

- a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
- b) Classificare gli stati della catena di Markov.
- c) Determinare la distribuzione limite.

3) Due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  hanno la densità di probabilità congiunta

$$f(x, y) = \begin{cases} Kxy & \text{se } y \geq 0, \ x^2 + y^2 - 4x \leq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- a) Determinare la costante reale  $K$ .
- b) Calcolare  $P(x \leq 1)$ .
- c) Calcolare le densità marginali.

# SOLUZIONE

- 1) La matrice  $A^{-1}$  esiste per  $\alpha \neq 0$  e risulta

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha^2} \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 & -1 \\ \alpha & -\alpha & \alpha \\ -\alpha^2 & \alpha^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$H_J = - \begin{pmatrix} 0 & 1/\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $H_J$  ha un autovalore nullo e gli altri due dati dalle radici quadrate (algebriche) di  $1 + \alpha$  (complesse o reali) per cui il metodo risulta convergente se  $|1 + \alpha| < 1$  e quindi se  $-2 < \alpha < 0$ .

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è

$$H_{GS} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice  $H_{GS}$  ha due autovalori nulli e il terzo è  $1 + \alpha$  per cui il metodo risulta convergente se  $|1 + \alpha| < 1$  e quindi se  $-2 < \alpha < 0$ .

- 2) Gli stati della catena sono  $E_i = S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La matrice di transizione è

$$T = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 & 11 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \\ 1 & 11 & 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice è irriducibile per cui gli stati sono tutti transitori.

La distribuzione limite è

$$\pi = \frac{1}{21}(5, 11, 5).$$

- 3) La regione del piano  $XY$  in cui  $f(x, y) \neq 0$  è il semicerchio di centro  $(2, 0)$  e raggio 2 posto nel  $I^o$  quadrante. Poichè

$$\begin{aligned} \int \int_{R^2} f(x, y) dy dx &= K \int_0^4 \left( \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} xy dy \right) dx = K \int_0^4 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4x-x^2}} dx \\ &= K \frac{1}{2} \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx = K \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^4 = K \frac{32}{3} \end{aligned}$$

si ha  $K = \frac{3}{32}$ .

Risulta

$$\begin{aligned} P(x \leq 1) &= \frac{3}{32} \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} xy \, dy \right) dx = \frac{3}{32} \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4x-x^2}} dx \\ &= \frac{3}{64} \int_0^1 (4x^2 - x^3) dx = \frac{3}{64} \left[ \frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{13}{256} . \end{aligned}$$

Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \frac{3}{32} \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} xy \, dy = \frac{3}{64} (4x^2 - x^3) ,$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{32} \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} xy \, dx = \frac{3}{8} y \sqrt{4-y^2} .$$