Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l’Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **31/05/06**

1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la fattorizzazione LR della matrice A.

b) Calcolare il polinomio caratteristico di A.

c) Approssimare con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$ il raggio spettrale della matrice A.

2) Un’urna A contiene 2 palline gialle e una seconda urna B contiene 5 palline rosse.
Si estraggono due palline, una dall’urna A e l’altra dall’urna B. Le due palline vengono reinserite nelle due urne scambiandole tra loro.
Si indichi con la variabile X il numero di palline rosse contenute nell’urna A.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Qual è la probabilità di avere due palline rosse nell’urna A dopo due estrazioni (partendo con due palline gialle)?

d) Determinare la distribuzione limite.

3) Una variabile continua X ha la seguente densità di probabilità:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0,\ x > 4, \\ 1/3 & 0 \leq x < 1, \\ 1/6 & 1 \leq x < 2, \\ 3/8 & 2 \leq x < 3, \\ 1/8 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

a) Determinare la funzione di ripartizione della variabile X.

b) Calcolare la media $E[X]$.

c) Calcolare la varianza $Var(X)$.

Soluzione

1) La fattorizzazione LR della matrice A è (si può calcolare direttamente o applicando l'algoritmo di Gauss)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice A risulta

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 1).$$

Considerando il fattore di terzo grado, dalla sucessione di Sturm

$$\begin{array}{rcl} P_0(\lambda) & = & \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\ P_1(\lambda) & = & 3\lambda^2 + 2\lambda - 2 \\ P_2(\lambda) & = & 14\lambda - 11 \\ P_3(\lambda) & = & \textit{costante} < 0 \end{array}$$

si evidenzia che la matrice A ha un autovalore $\lambda_1 = -1$, due autovalori complessi coniugati $\lambda_{2,3}$ di modulo minore di 1 ed un autovalore λ_4 negativo di modulo maggiore di 1 per cui $\rho(A) = |\lambda_4|$.
Risulta $\lambda_4 \in]-3, -2[$ ed il metodo di Newton è sicuramente convergente se si sceglie il punto iniziale $x_0 = -3$. Infine, si ottiene

$$\rho(A) \in]2.14, 2.15[\,.$$

2) Gli stati della catena sono dati dai possibili valori assunti dalla variabile X e cioè $X = 0, 1, 2$. La matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/10 & 1/2 & 2/5 \\ 0 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Gli stati della catena sono tutti transitori.
Iniziando con due palline gialle nell'urna A si ha la distribuzione iniziale $p^{(0)} = (1, 0, 0)$ per cui si ottiene $p^{(1)} = p^{(0)}T = (0, 1, 0)$ e $p^{(2)} = p^{(1)}T = (1/10, 1/2, 2/5)$.
La probabilità richiesta risulta uguale a $\frac{2}{5}$.
La distribuzione limite π tale che $\pi = \pi T$ è

$$\pi = \frac{1}{21}(1, 10, 10)\,.$$

3) La funzione di ripartizione della variabile considerata risulta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1/3\,x & 0 \le x < 1, \\ 1/6\,x + 1/6 & 1 \le x < 2, \\ 3/8\,x - 1/4 & 2 \le x < 3, \\ 1/8\,x + 1/2 & 3 \le x \le 4, \\ 1 & x > 4\,. \end{cases}$$

Con semplici calcoli si ottiene

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) = \frac{43}{24} \, ,$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) = \frac{106}{24} \, ,$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{695}{576} \, .$$