Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l’Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell’Automazione 22/07/09

1) È data l’equazione

$$x^3 + x^2 - 8x + \lambda = 0\,, \quad \lambda \in R\,.$$

a) Studiare l’equazione al variare del parametro reale λ.

b) Posto $\lambda = 8$, determinare un intervallo di separazione per ciascuna delle soluzioni reali.

2) Sul tavolo di una biblioteca sono posti uno sopra all’altro 3 volumi (numerati da 1 a 3) di una enciclopedia.
I visitatori consultanno con uguale probabilità uno dei tre volumi riponendolo sopra gli altri due. È escluso che più visitatori consultino contemporaneamente i volumi dell’enciclopedia.
Si considerino come stati della catena i possibili ordini con cui sono riposti i volumi.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la/e distribuzione/i limite.

d) Posto $p^{(0)} = (1,0,0,0,0,0)$, calcolare $p^{(1)}$ e $p^{(2)}$.

3) Una variabile X ha la densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} C\,x & -1 < x < 0 \\ C^2\,(x+1) & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad , \quad C \in R\,.$$

a) Determinare la costante reale C.

b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

c) Calcolare $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{2}\right)$.

Soluzione

1) L'equazione può essere studiata calcolando la successione di Sturm. Si ottiene

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= x^3 + x^2 - 8x + \lambda \\
P_1(x) &= 3x^2 + 2x - 8 \\
P_2(x) &= 50x - 8 - 9\lambda \\
P_3(x) &= 2112 - 148\lambda - 27\lambda^2
\end{aligned}
$$

Si osserva che il polinomio $P_3(x)$ si annulla per $\lambda = -12$, e $\lambda = \frac{176}{27}$. Si ha quindi il seguente prospetto:

$$
\begin{array}{rl}
\lambda < -12 & \text{una sol. reale e due c.c.} \\
\lambda = -12 & x_1 = x_2 = -2 \text{ e } x_3 = 3 \\
-12 < \lambda < \dfrac{176}{27} & \text{tre sol. reali distinte} \\
\lambda = \dfrac{176}{27} & x_1 = x_2 = \frac{4}{3}\ x_3 = -\frac{11}{3} \\
\lambda > \dfrac{176}{27} & \text{una sol. reale e due c.c.}
\end{array}
$$

Allo stesso risultato si arriva con una separazione grafica. Tra queste, la più semplice è $\begin{cases} y = \lambda \\ y = -x^3 - x^2 + 8x \end{cases}$.
Ponendo $\lambda = 8$ si ha una sola soluzione reale $x_1 \in [-3.8, -3.7]$ ($x_1 = -3.724576\ldots$).

2) Supponiamo, per esempio, che le 6 possibili sequenze dei tre volumi dell'enciclopedia (cioè i 6 stati della catena) dal basso verso l'alto siano

$$
E_1 = (1,2,3), \quad E_2 = (1,3,2), \quad E_3 = (2,1,3),
$$

$$
E_4 = (3,2,1), \quad E_5 = (3,1,2), \quad E_6 = (2,3,1).
$$

La matrice di transizione è

$$
T = \begin{pmatrix}
1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3
\end{pmatrix}.
$$

Non si hanno classi chiuse per cui tutti gli stati sono ricorrenti.
La distribuzione limite, essendo la matrice T bistocastica, è

$$\pi = \frac{1}{6}(1,1,1,1,1,1)\,.$$

Ponendo $p^{(0)} = (1,0,0,0,0,0)$ si hanno $p^{(1)} = \frac{1}{3}(1,1,0,0,0,1)$ e $p^{(2)} = \frac{1}{9}(2,2,1,1,1,2)$.

3) La costante C si determina imponendo $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} Cxdx + \int_{0}^{1} C^2(x+1)dx = -\frac{1}{2}C + \frac{3}{2}C^2$$

si ricava $C = -\frac{2}{3}$.
Segue

$$E[X] = -\int_{-1}^{0} \frac{2}{3}x^2dx + \int_{0}^{1} \frac{4}{9}x(x+1)dx = \frac{4}{27}\,,$$

$$E[X^2] = -\int_{-1}^{0} \frac{2}{3}x^3dx + \int_{0}^{1} \frac{4}{9}x^2(x+1)dx = \frac{23}{54}$$

per cui $Var(x) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{589}{1458}$.
La funzione di ripartizione è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}(1-x^2) & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{9}(2x^2+4x) + \frac{1}{3} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}\,.$$

Risulta quindi

$$P(\left(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{41}{81} = \frac{40}{81}\,.$$