Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 16/07/08

1) Determinare i pesi a_0, a_1 ed i nodi x_0, x_1 in modo tale che la formula di quadratura

$$\int_{-1}^{1} x^2\, f(x)\, dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + E_1(f)$$

abbia grado di precisione massimo. Determinare tale grado di precisione.

2) Ogni anno Mario passa le vacanze a Viareggio o a Rimini o a Lampedusa. Non si reca mai nello stesso luogo per due anni di seguito. Per la scelta tra le altre due possibilità, Mario ha preparato 10 biglietti: su 5 di essi ha scritto Viareggio, su 3 ha scritto Rimini e su 2 Lampedusa. Inserisce in un'urna solo i biglietti relativi alle località in cui potrebbe recarsi e decide di andare nel luogo indicato sul secondo biglietto estratto senza aver reinserito il primo.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la/e distribuzione/i limite.

d) Partendo con uguale probabilità da una delle tre località, quale è la probabilità di andare in vacanza a Rimini dopo due anni?

3) Due variabili aleatorie X e Y hanno la densità di probabilità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} Cye^x & \text{se} \quad x \geq 0,\, y \geq 0,\, y \leq 2-2x\,, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare la costante reale C.

b) Calcolare le densità marginali.

c) Le due variabili sono indipendenti?

d) Determinare $P\,(X \geq Y)$.

Soluzione

1) Si impone che la formula data sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$, ottenendo il sistema nonlineare

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 &= 2/3 \\ a_0 x_0 + a_1 x_1 &= 0 \\ a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 &= 2/5 \\ a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Le quattro equazioni sono verificate se

$$a_0 = a_1 = \frac{1}{3}\,, \quad x_0 = -x_1 = \sqrt{\frac{3}{5}}\,.$$

Il grado di precisione raggiunto è 3 risultando $E[x^4] \neq 0$.

2) Indicando con E_i, $i = 1, 2, 3$, i tre stati, rispettivamente, Viareggio, Rimini e Lampedusa si ha la matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & 2/5 \\ 5/7 & 0 & 2/7 \\ 5/8 & 3/8 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

La catena risulta irriducibile per cui non si hanno classi chiuse e gli stati sono tutti ricorrenti.
Si ha un'unica distribuzione limite che verifica il sistema $\pi = \pi T$ data da

$$\pi = \frac{1}{62}(25, 21, 16)\,.$$

Partendo con la distribuzione $p^{(0)} = \frac{1}{3}(1, 1, 1)$ si ha $p^{(1)} = \frac{1}{280}(125, 91, 64)$ e $p^{(2)} = \frac{1}{280}(105, 99, 76)$. Segue che la probabilità richiesta è $\frac{99}{280}$.

3) Essendo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} ye^x dy = 4e - 10$$

si ha $C = \frac{1}{4e-10}$.
Le densità marginali sono

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy &= \int_0^{2-2x} \frac{1}{4e-10} ye^x dy = \frac{(x-1)^2 e^x}{2e-5}\,. \\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx &= \int_0^{(2-y)/2} \frac{1}{4e-10} ye^x dx = \frac{y(e^{(2-y)/2} - 1)}{4e-10}\,. \end{aligned}$$

Le due variabili non sono indipendenti.
Infine

$$\begin{aligned} P(X \geq Y) &= \int_0^{2/3} dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_{2/3}^1 dx \int_0^{2-2x} f(x,y)dy \\ &= \frac{4e - 5e^{2/3} - 1}{4e - 10}\,. \end{aligned}$$