Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **12/07/06**

1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \alpha \in \mathrm{R}$$

a) Calcolare gli autovalori della matrice A.

b) Per quali valori del parametro reale α la matrice A risulta convergente?

2) Un palazzo ha 4 piani più il piano terra.
Una persona, all'interno del palazzo, lancia un dado (non truccato) a 4 (quattro) facce numerate da 1 a 4.
Se il valore ottenuto con il dado risulta inferiore od uguale al piano in cui la persona si trova in quel momento, scende di un piano, altrimenti sale di un piano.
Nel momento in cui la persona si trova a piano terra od al quarto piano, il processo ha termine.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Calcolare le probabilitá di assorbimento.

d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Due variabili discrete X, Y, hanno la densità congiunta riportata nella seguente tabella:

		Y		
		2	4	6
X	1	0.15	0.20	0.35
	3	0.05	0.10	0.15

.

a) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

b) Calcolare $E[X]$, $E[Y]$ e $E[XY]$.

c) Le variabili X e Y sono indipendenti?

d) Calcolare $Var(X)$, $Var(Y)$ e $Cov(X,Y)$.

Soluzione

1) La matrice A è riducibile ed attraverso la matrice $P = (e^{(1)}, e^{(3)}, e^{(2)}, e^{(4)})$ si ottiene

$$B = P^T A P = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -1 \end{array} \right) .$$

L'equazione caratteristica risulta uguale al prodotto dei polinomi caratteristici dei due blocchi diagonali (uno l'opposto dell'altro). Tali polinomi sono $P_1(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \alpha^2$, $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \alpha^2$.
Risultando la traccia dei due blocchi (basterebbe uno solo dei due) di modulo 2, gli autovalori non possono essere tutti di modulo minore di 1 per cui non esistono valori reali di α per i quali la matrice risulti convergente. In particolare, gli autovalori sono

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \alpha \, , \qquad \lambda_{3,4} = -1 \pm \alpha \, .$$

2) Indichiamo gli stati della catena con $E_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. La matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si hanno due stati assorbenti (quindi due classi chiuse) $C^{(1)} = \{E_0\}$ e $C^{(2)} = \{E_4\}$. Gli stati E_1, E_2, E_3 sono transitori.
Le probabilità di assorbimento nella classe $C^{(1)}$ si ootengono risolvendo il sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1^{(1)} & = & \frac{3}{4}\lambda_2^{(1)} + \frac{1}{4} \\ \lambda_2^{(1)} & = & \frac{1}{2}\lambda_1^{(1)} + \frac{1}{2}\lambda_3^{(1)} \\ \lambda_3^{(1)} & = & \frac{3}{4}\lambda_2^{(1)} \end{array}$$

la cui soluzione è

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{5}{8} \, , \quad \lambda_2^{(1)} = \frac{1}{2} \, , \quad \lambda_3^{(1)} = \frac{3}{8} \, .$$

Ovviamente si ha

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{3}{8} \, , \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{1}{2} \, , \quad \lambda_3^{(2)} = \frac{5}{8} \, .$$

I tempi medi di assorbimento sono dati dalla soluzione del sistema lineare

$$\begin{array}{rcl} \eta_1 & = & \frac{3}{4}\eta_2 + 1 \\ \eta_2 & = & \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_3 + 1 \\ \eta_3 & = & \frac{3}{4}\eta_2 + 1 \end{array}$$

che è

$$\eta_1 = 7 \,, \quad \eta_2 = 8 \,, \quad \eta_3 = 7 \,.$$

3) Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.7 & x = 1 \,, \\ 0.3 & x = 3 \,, \end{cases} \quad , \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0.2 & y = 2 \,, \\ 0.3 & y = 4 \,, \\ 0.5 & y = 6 \,, \end{cases} \quad .$$

La densità di probabilità della variabile $U = XY$ è

$$f(x,y) = \begin{cases} 0.15 & xy = 2 \,, \\ 0.20 & xy = 4 \,, \\ 0.40 & xy = 6 \,, \\ 0.10 & xy = 12 \,, \\ 0.15 & xy = 18 \,, \end{cases} \quad .$$

Con semplici calcoli abbiamo

$$E[X] = 1.6 \,, \quad E[Y] = 4.6 \,, \quad E[XY] = 7.4 \,,$$

per cui, risultando $E[XY] \neq E[X]E[Y] = 7.36$, le due variabili non sono indipendenti.
Infine, da $E[X^2] = 3.4$ e $E[Y^2] = 23.6$ si ottiene

$$Var(X) = 0.84 \,, \quad Var(Y) = 2.44 \,, \quad Cov(X,Y) = 0.04 \,.$$