Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **20/07/05**

1) È dato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ -5/2 \\ 27/2 \\ 2 \\ -3/2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare gli autovalori di A.

b) Il metodo iterativo di Jacobi converge?

c) Calcolare la soluzione del sistema lineare.

2) Ad ogni scommessa, un giocatore puó vincere 1 Euro con probabilità 1/6, 2 Euro con probabilità 1/3 o perdere 2 Euro con probabilità 1/2. Il giuoco si interrompe quando il giocatore ha 0 Euro (o andrebbe in negativo) oppure quando possiede 5 Euro (o potrebbe averne di piú).

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Calcolare le probabilitá di assorbimento.

d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Una azienda produce motori per motoscafi utilizzando tre catene di montaggio.
La prima catena produce il 20% dei motori con la probabilità del 15% che siano difettosi; la seconda catena produce il 50% dei motori con probabilità 10% che siano difettosi ed infine la terza catena produce il 30% dei motori di cui sono difettosi l'8%.

a) Determinare la probabilità complessiva di avere un motore difettoso.

b) Calcolare le probabilità che un motore difettoso sia stato prodotto dalla i-esima ($i = 1, 2, 3$) catena di montaggio.

SOLUZIONE

1) La matrice A è partizionabile nella seguente forma triangolare a blocchi

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3/2 & 3/2 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{array}\right) .$$

Gli autovalori di A sono gli autovalori dei blocchi $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$, (3), (-2) e (1). Si ha quindi

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \, , \; \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \, , \; \lambda_3 = 3 \, , \; \lambda_4 = -2 \, , \; \lambda_5 = 1 \, .$$

Il metodo di Jacobi risulta convergente essendo la matrice a predominanza diagonale debole ed in forma ridotta. Altrimenti, la matrice di iterazione del metodo di Jacobi

$$H_J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

ha tre autovalori nulli e gli altri due dati da $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ per cui il metodo risulta convergente.
La soluzione del sistema lineare $Ax = b$ è

$$x = (1, 2, 3, -1, -1)^T \, .$$

2) Gli stati della catena sono $E_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, dove i rappresenta il numero degli Euro posseduti. La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/6 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Si hanno due classi chiuse date dai due stati assorbenti $C^{(1)} = \{E_0\}$ e $C^{(2)} = \{E_5\}$: gli altri stati sono transitori.
Le probabilità di assorbimento nella prima classe chiusa sono

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{73}{96}\,,\ \lambda_2^{(1)} = \frac{22}{32}\,,\ \lambda_3^{(1)} = \frac{14}{32}\,,\ \lambda_4^{(1)} = \frac{11}{32}\,.$$

Seguono le probabilità di assorbimento nella seconda classe chiusa

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{23}{96}\,,\ \lambda_2^{(2)} = \frac{10}{32}\,,\ \lambda_3^{(2)} = \frac{18}{32}\,,\ \lambda_4^{(2)} = \frac{21}{32}\,.$$

I tempi medi di assorbimento sono

$$\eta_1 = \frac{155}{72}\,,\ \eta_2 = \frac{25}{12}\,,\ \eta_3 = \frac{29}{12}\,,\ \eta_4 = \frac{49}{24}\,.$$

3) Indichiamo con C_1, C_2, C_3 le tre catene di montaggio e con D la variabile che indica se un motore risulta difettoso.
Dai dati del problema si ha

$$P(C_1) = 0.2\,,\quad P(C_2) = 0.5\,,\quad P(C_3) = 0.3\,,$$

$$P(D|C_1) = 0.15\,,\quad P(D|C_2) = 0.1\quad P(D|C_3) = 0.08\,.$$

Segue

$$P(D) = \sum_{i=1}^{3} P(D|C_i)P(C_i) = 0.15 \times 0.2 + 0.1 \times 0.5 + 0.08 \times 0.3 = 0.104\,;$$

$$P(C_1|D) = \frac{P(D|C_1)P(C_1)}{P(D)} = \frac{0.15 \times 0.2}{0.104} = \frac{0.03}{0.104} = \frac{30}{104}\,,$$

$$P(C_2|D) = \frac{P(D|C_2)P(C_2)}{P(D)} = \frac{0.1 \times 0.5}{0.104} = \frac{0.05}{0.104} = \frac{50}{104}\,,$$

$$P(C_3|D) = \frac{P(D|C_3)P(C_3)}{P(D)} = \frac{0.08 \times 0.3}{0.104} = \frac{0.024}{0.104} = \frac{24}{104}\,.$$