Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 27/06/07

1) Determinare i pesi ed i nodi della formula di quadratura

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) f(x)\, dx = a f(x_0) + b f(x_1) + E(f)$$

in modo tale da ottenere il massimo grado di precisione algebrico. Indicare il grado di precisione raggiunto.

2) Due ragazzi si muovono da un vertice all'altro di un poligono regolare con 8 lati. Ad ogni intervallo di tempo ciascuno dei ragazzi si sposta, con uguale probabilità, su un vertice adiacente a quello in cui si trova. Indichiamo con E_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, il numero minimo di lati del poligono che separano i due ragazzi.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) La catena risulta riducibile?

c) Classificare gli stati della catena di Markov.

d) Determinare la/e distribuzione/i limite.

3) Si ha un mazzo di 12 carte di cui 6 ROSSE e 6 NERE. Si estraggono 6 carte e sia X la v.a. che indica quante sono le carte ROSSE estratte.

a) Calcolare $P(X = 3)$.

b) Se si ritengono valide solo le estrazioni con almeno 3 carte ROSSE, qual è la probabilità di avere 4 carte ROSSE?

c) Analogamente al punto precedente, qual è la probabilità di avere 6 carte ROSSE?

Soluzione

1) Si impone che la formula proposta sia esatta per $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ ottenendo il sistema nonlineare

$$\begin{cases} a+b & = & 2 \\ ax_0 + bx_1 & = & 0 \\ ax_0^2 + bx_1^2 & = & \frac{\pi^2}{2} - 4 \\ ax_0^3 + bx_1^3 & = & 0 \end{cases} .$$

La soluzione del sistema è

$$a = b = 1\,, \quad x_0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}\,, \quad x_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi^2 - 8}\,.$$

Essendo $J_1(x^4) = \frac{\pi^4}{8} - 2\pi^2 + 8$ e $I(x^4 \cos x) = \frac{\pi^4}{8} - 6\pi^2 + 8$ risulta $E_1(x^4) \neq 0$ per cui il grado di precisione algebrico ottenuto è $m = 3$.

2) La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

La catena risulta riducibile essendo costituita dalle classi chiuse $\mathcal{C}^{(1)} = \{E_0, E_2, E_4\}$ e $\mathcal{C}^{(2)} = \{E_1, E_3\}$; non ci sono stati transitori.
Si hanno due distribuzioni limite

$$\pi^{(1)} = \frac{1}{4}(1, 0, 2, 0, 1)\,, \quad \pi^{(2)} = \frac{1}{2}(0, 1, 0, 1, 0)\,.$$

3) La variabile X segue la legge ipergeometrica per cui

$$P(X = 3) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{100}{231}\,.$$

Risultano anche $P(X = 0) = P(X = 6) = \frac{1}{924}$, $P(X = 1) = P(X = 5) = \frac{36}{924}$, $P(X = 2) = P(X = 4) = \frac{225}{924}$.
Essendo $P(X \geq 3) = \frac{662}{924}$, la probabilità cercata è

$$P(X = 4 | X \geq 3) = \frac{P(X = 4, X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X = 4)}{P(X \geq 3)} = \frac{225}{924} \cdot \frac{924}{662} = \frac{225}{662}\,.$$

Analogamente si ha

$$P(X = 6 | X \geq 3) = \frac{P(X = 6, X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{P(X = 6)}{P(X \geq 3)} = \frac{1}{924} \cdot \frac{924}{662} = \frac{1}{662} \, .$$