



- 1) È data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcolare il raggio spettrale di A .
 - b) Determinare i valori reali di α per i quali converge il metodo di Jacobi.
 - c) Calcolare la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel e dire, giustificando la risposta, se converge per $\alpha = \frac{1}{4}$.
- 2) Due ragazzi, A e B , hanno una scatola contenente due palline bianche e tre palline verdi. Effettuano delle estrazioni con le seguenti regole: se la pallina estratta è verde, questa viene messa da parte, mentre se la pallina è bianca, questa si reinserisce nella scatola insieme ad una nuova pallina verde. Il processo termina con la vittoria del ragazzo A se nella scatola rimangono zero palline verdi o con la vittoria del ragazzo B se nella scatola si trovano 5 palline verdi.
- a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.
 - b) Classificare gli stati della catena di Markov.
 - c) Determinare la/e distribuzione/i limite.
 - d) Quale ragazzo ha maggiori probabilità di vittoria?
 - e) Quale è il tempo medio di durata del processo?
- 3) Una variabile aleatoria X ha densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} Ce^x & -\infty < x < 0 \\ C^2x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- a) Calcolare la costante reale C .
- b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.
- c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

SOLUZIONE

- 1) Traslando lo spettro di 1 si ha la matrice $B = A - I = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ che ha equazione caratteristica $\mu^3 + 3\alpha^2\mu = 0$. Gli autovalori di B sono $\mu_1 = 0$, $\mu_{2,3} = \pm i\alpha\sqrt{3}$ per cui gli autovalori della matrice A sono

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + i\alpha\sqrt{3}, \quad \lambda_3 = 1 - i\alpha\sqrt{3}.$$

Il raggio spettrale della matrice A è $\rho(A) = \sqrt{1 + 3\alpha^2}$.

La matrice di iterazione di Jacobi risulta $H_J = -B$. Segue che il metodo converge se $|\alpha| < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

la matrice di iterazione di Gauss-Seidel è $H_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & -\alpha^2 & \alpha^2 - \alpha \\ 0 & -\alpha^3 + \alpha^2 & \alpha^3 - 2\alpha^2 \end{pmatrix}$.

Posto $\alpha = \frac{1}{4}$, la matrice di iterazione di Gauss-Seidel converge poiché la matrice A risulta a predominanza diagonale forte.

Per completezza, l'equazione caratteristica di H_{GS} è $\mu(\mu^2 + \frac{11}{64}\mu + \frac{1}{64}) = 0$. Un autovalore risulta nullo mentre gli altri due, per ricavarli basta risolvere una equazione di secondo grado, sono di modulo minore di 1 per cui il metodo è convergente.

- 2) Siano E_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, gli stati della catena indicando con i il numero di palline verdi contenute nella scatola. La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si presentano due classi chiuse $\mathcal{C}^{(1)} = \{E_0\}$ e $\mathcal{C}^{(2)} = \{E_5\}$; gli stati E_1, E_2, E_3, E_4 sono transitori.

Si hanno due distribuzioni limite $\pi^{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ e $\pi^{(2)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Le probabilità di assorbimento nella classe $\mathcal{C}^{(1)}$, risolvendo un opportuno sistema lineare, sono

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{13}{17}, \quad \lambda_2^{(1)} = \frac{11}{17}, \quad \lambda_3^{(1)} = \frac{9}{17}, \quad \lambda_4^{(1)} = \frac{6}{17}.$$

Segue che le probabilità di assorbimento nella classe $\mathcal{C}^{(2)}$ sono

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{4}{17}, \quad \lambda_2^{(2)} = \frac{6}{17}, \quad \lambda_3^{(2)} = \frac{8}{17}, \quad \lambda_4^{(2)} = \frac{11}{17}.$$

Poiché si parte con 2 palline bianche e tre palline verdi le probabilità di assorbimento da considerare sono i valori λ_3 e quindi ha maggiori probabilità di successo il ragazzo A.

I tempi medi si determinano risolvendo il relativo sistema lineare la cui soluzione è

$$\eta_1 = \frac{125}{17}, \quad \eta_2 = \frac{162}{17}, \quad \eta_3 = \frac{165}{17}, \quad \eta_4 = \frac{127}{17}.$$

Il tempo medio della durata del gioco è dato dal valore $\eta_3 = \frac{165}{17} \simeq 9.7058$.

3) La costante C si determina imponendo che risulti $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ per cui

$$\int_{-\infty}^0 C e^x dx + \int_0^2 C^2 x dx = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}.$$

Si ottiene anche

$$E[X] = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} x e^x dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 dx = \frac{1}{6},$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} x^2 e^x dx + \int_0^2 \frac{1}{4} x^3 dx = 2,$$

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{71}{36}.$$

Infine, si ha la funzione di ripartizione

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x & -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}.$$