Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **8/06/05**

1) Studiare l'equazione

$$\log(x^2) + x + K = 0$$

al variare del parametro reale K.
Posto $K = 1$, approssimare la soluzione piú grande con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.

2) Una persona è solita, ogni giorno, prendere aerei che collegano tra loro Roma, Francoforte e Mosca. La scelta degli spostamenti da fare è decisa nei seguenti modi in funzione del luogo in cui si trova:

Roma: lanciando un dado (non truccato) rimane a Roma se ottiene un punteggio minore od uguale a 4 (quattro), si sposta a Francoforte se ottiene 5 (cinque), parte per Mosca se ottiene 6 (sei);

Francoforte: lanciando un dado (non truccato) rimane a Francoforte se ottiene 3 (tre), si sposta a Roma se ottiene un punteggio minore od uguale a 2 (due), parte per Mosca se ottiene piú di tre (tre);

Mosca: lanciando tre volte una moneta equilibrata rimane a Mosca se ottiene 0 (zero) o 3 (tre) Teste, si sposta a Roma se ottiene 2 (due) Teste, parte per Francoforte se ottiene 1 (una) Testa.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la distribuzione limite (se esiste).

d) La persona in oggetto, dove avrá piú probabilitá di trovarsi dopo 3 anni?

3) Una variabile aleatoria X ha la seguente funzione di densitá

$$f(x) = \begin{cases} K & \text{se } -1 < x < 0, \\ \frac{11}{40}x & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \\ \frac{1}{10} & \text{se } 2 < x \leq 4, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Determinare la costante reale K.

b) Calcolare $E[X]$ e $Var(X)$.

c) Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.

Soluzione

1) Al variare di K si hanno le seguenti possibiltá:

   $K < 2(1 - \log 2)$ una soluzione reale positiva;

   $K = 2(1 - \log 2)$ due soluzioni reali, una positiva e l'altra negativa di molteplicitá due ($x = -2$);

   $K > 2(1 - \log 2)$ tre soluzioni reali distinte, una positiva, le altre negative.

   Posto $K = 1$, si hanno tre soluzioni reali distinte. La maggiore è separata dall'intervallo $[0.4, 0.6]$.
   Posto $f(x) = \log(x^2) + x + 1$, risultano $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ per cui il metodo di Newton converge scegliendo come valore iniziale $x_0 = 0.4$. Si ottiene quindi $\alpha \in [0.47, 0.48]$.

2) Indicati con E_1, E_2, E_3 gli stati corrispondenti, ripsettivamente, alle cittá di Roma, Francoforte e Mosca, la matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 1/6 & 1/2 \\ 3/8 & 3/8 & 2/8 \end{pmatrix} .$$

   La catena risulta irriducibile per cui gli stati sono tutti transitori.
   La distribuzione limite π che verifica $\pi = \pi T$ é $\pi = \frac{1}{122}(63, 27, 32)$.
   Dopo tre anni la probabilitá maggiore é di trovarsi a Roma.

3) La costante K si determina imponendo $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ per cui $K = 1/4$.
   Con semplici calcoli si ricavano

$$E[X] = \frac{29}{24} \, , \; E[X^2] = \frac{61}{20} \, , \; Var(X) = \frac{4579}{2880} \, .$$

   La funzione di ripartizione $F(x)$ risulta

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{11}{80}x^2 + \frac{1}{4} & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{10}x + \frac{3}{5} & \text{se } 2 < x \leq 4 \\ 1 & \text{se } 4 < x \end{cases} .$$