Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **22/06/06**

1) Studiare l'equazione

$$\frac{\alpha}{x} - \sqrt{x+1} = 0$$

al variare del parametro reale α.
Posto $\alpha = 1$,

a) indicare intervalli di separazione delle soluzioni dell'equazione data;

b) studiare la convergenza dei metodi

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n + 1}}\,, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} - 1\,;$$

c) approssimare la soluzione reale piú grande con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-3}$.

2) È data una catena di Markov con matrice di transizione

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

a) La catena risulta riducibile?

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Calcolare le probabilità di assorbimento.

d) Calcolare i tempi medi di assorbimento.

3) Una urna A contiene 7 palline numerate da 1 a 7, una urna B contiene 6 palline numerate da 1 a 6.
Si estrae una pallina da una delle due urne. Se la pallina ha un numero pari si estrae una seconda pallina dalla stessa urna; se la pallina ha un numero dispari si estrae una seconda pallina dall'altra urna.

a) Calcolare la probabilità di estrarre due palline con numero pari.

b) Calcolare la probabilità di estrarre due palline con numero dispari.

c) Supposto di avere estratto due palline con numero pari, qual è la probabilità di averle estratte dall'urna A?

Soluzione

1) Al variare di α si hanno le seguenti possibiltá:

   $\alpha < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ nessuna soluzione reale;

   $\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ due soluzioni reali coincidenti date da $x = -\frac{2}{3}$;

   $-\frac{2\sqrt{3}}{9} < \alpha < 0$ due soluzioni reali negative;

   $\alpha = 0$ una soluzione reale $x = -1$;

   $\alpha > 0$ una soluzione reale positiva.

   Posto $\alpha = 1$, si ha una unica soluzione reale separata dall'intervallo $[0.5, 1]$.
   Il primo metodo proposto risulta idoneo alla approssimazione della soluzione avendo $|\phi'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}}$ che assume valori minori di 1 su tutto l'intervallo di separazione.
   Il secondo metodo non assicura la convergenza alla soluzione avendo $|\phi'(x)| = \frac{2}{x^3}$ che assume valori maggiori di 1 su tutto l'intervallo di separazione.
   Si utilizza quindi il primo metodo; scegliendo come valore iniziale $x_0 = 0.75$ si ottiene $\alpha \in [0.754, 0.755]$.

2) Indicati con E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 gli stati della catena, si osserva che la matrice T (ovvero la catena) è riducibile.
   Si hanno due classi chiuse date da $C^{(1)} = \{E_1, E_3\}$ e $C^{(2)} = \{E_4\}$ che è anche uno stato assorbente. Gli stati E_2 e E_5 sono transitori.
   Le probabilità di assorbimento nella classe $C^{(1)}$ si ottengono risolvendo il sistema lineare

$$\begin{aligned} \lambda_2^{(1)} &= \tfrac{1}{5}\lambda_2^{(1)} + \tfrac{1}{5}\lambda_5^{(1)} + \tfrac{2}{5} \\ \lambda_5^{(1)} &= \tfrac{1}{5}\lambda_2^{(1)} + \tfrac{1}{5}\lambda_5^{(1)} + \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

   la cui soluzione è

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{2}{3}\,, \quad \lambda_5^{(1)} = \frac{2}{3}\,.$$

   Segue che le probabilità di assorbimento nella classe $C^{(2)}$ sono

$$\lambda_2^{(2)} = \frac{1}{3}\,, \quad \lambda_5^{(2)} = \frac{1}{3}\,.$$

   I tempi medi di assorbimento si ottengo risolvendo il sistema

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \tfrac{1}{5}\eta_2 + \tfrac{1}{5}\eta_5 + 1 \\ \eta_5 &= \tfrac{1}{5}\eta_2 + \tfrac{1}{5}\eta_5 + 1 \end{aligned}$$

   la cui soluzione è

$$\eta_2 = \frac{5}{3}\,, \quad \eta_5 = \frac{5}{3}\,.$$

3) Indichiamo con P_1, P_2, D_1, D_2 i possibili risultati delle estrazioni; con $P_i(U)$, $i = 1, 2$, $U = A, B$, l'estrazione di una pallina con numero pari da una delle due urne (analogamente useremo il simbolo $D_i(U)$).
   Si ha

$$\begin{aligned} P(P_1 \cap P_2) &= P(P_2|P_1)P(P_1) \\ &= P(P_2|P_1(A))P(P_1|A)P(A) + P(P_2|P_1(B))P(P_1|B)P(B) \\ &= \frac{1}{3}\frac{3}{7}\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{6}{35}\,. \end{aligned}$$

In maniera analoga si ottiene

$$P(D_1 \cap D_2) = \frac{2}{7} \,.$$

Infine

$$P(A|(P_1 \cap P_2)) = \frac{P((P_1 \cap P_2) \cap A)}{P(P_1 \cap P_2)} = \frac{5}{12} \,.$$