Dipartimento di Matematica Applicata
"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell'Automazione 28/01/10

1) Si vuole approssimare l'integrale

$$\int_0^1 \cos(x)e^x \, dx$$

con massimo errore assoluto $E \leq 10^{-2}$.
Determinare il numero di sottointervalli in cui si deve dividere l'intervallo $[0, 1]$ per ottenere tale approssimazione utilizzando la formula dei trapezi. Stesso quesito per la formula di Cavalieri-Simpson.

2) Un giocatore di poker vince una mano con probabilità $\frac{1}{4}$ se ha vinto la mano precedente o con probabilità $\frac{2}{3}$ se invece ha perso.

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena.

c) Si supponga che alla prima mano abbia uguale probabilità di vittoria o di sconfitta.

   i) Calcolare la probabilità di vittoria alla seconda mano.

   ii) Calcolare la probabilità di vittoria alla terza mano.

   iii) Calcolare la probabilità di vittoria alla 1237^a mano.

3) Si hanno tre urne U_i, $i = 1, 2, 3$, uguali contenenti palline gialle (G) e palline rosse (R). L'urna U_1 contiene 4 R e 2 G, l'urna U_2 contiene 2 R e 2 G mentre nell'urna U_3 si hanno 3 R e 5 G.

a) Si estrae una pallina da ogni urna: qual è la probabilità di avere complessivamente $0, 1, 2, 3$ palline gialle?

b) Si estrae una pallina da un'urna scelta a caso: qual è la probabilità che la pallina sia gialla?

c) Senza renserire la pallina estratta al punto b) e supponendo che questa sia di colore giallo, se si estrae una seconda pallina dalla stessa urna, qual è la probabilità di avere una seconda pallina gialla?

Soluzione

1) Posto $f(x) = \cos(x)e^x$, si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^x(\cos(x) - \sin(x)) \, , \\
f''(x) &= -2e^x \sin(x) \, , \\
f'''(x) &= -2e^x(\sin(x) + \cos(x)) \, , \\
f^{(IV)}(x) &= -4e^x \cos(x) \, ,
\end{aligned}$$

da cui $M_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| \leq 5$ e $M_4 = \sup_{x\in[0,1]} |f^{(IV)}(x)| \leq 7$.
Imponendo che risultino $E_2^{(G)}(f) = \frac{(b-a)^3}{12K_T^2} M_2 \leq E$ e $E_4^{(G)}(f) = \frac{(b-a)^5}{2880K_{CS}^4} M_4 \leq E$ si ottengono, rispettivamente, $K_T \geq \sqrt{\frac{5}{12E}}$ e $K_{CS} \geq \sqrt[4]{\frac{7}{2880E}}$.
Tenendo conto degli errori nel calcolo dei valori di $f(x)$ necessari per valutare le formule e ponendo quindi, per esempio, $E = \frac{10^{-2}}{2}$ si ricava

$$K_T \geq 10 \, , \qquad K_{CS} \geq 1 \, .$$

2) Gli stati della catena sono due corrispondenti alla vittoria ed alla sconfitta del giocatore. Ponendo, per esempio, $E_1 = \{VITTORIA\}$ e $E_2 = \{SCONFITTA\}$ la matrice di transizione risulta

$$T = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \, .$$

Ovviamente, la matrice e quindi la catena non risulta riducibile.
La probabilità di partenza è $p^{(0)} = (1/2, 1/2)$.
Da questa si ottengono

$$p^{(1)} = \frac{1}{24}(11, 13) \, , \qquad p^{(2)} = \frac{1}{288}(137, 151) \, .$$

La probabilità $p^{(1237)}$ coincide con la distribuzione limite π che verifica la relazione $\pi = \pi T$ da cui

$$\pi = \frac{1}{17}(8, 9) \, .$$

Le probabilità richieste sono, rispettivamente, 11/24, 137/288 e 8/17.

3) Si hanno le probabilità condizionate $P(G|U_1) = \frac{1}{3}$, $P(R|U_1) = \frac{2}{3}$, $P(G|U_2) = \frac{1}{2}$, $P(R|U_2) = \frac{1}{2}$, $P(G|U_3) = \frac{5}{8}$, $P(R|U_3) = \frac{3}{8}$.

La variabile X che conta quante palline gialle sono state estratte ha densità di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } x = 0, \\ \frac{19}{48} & \text{se } x = 1, \\ \frac{18}{48} & \text{se } x = 2, \\ \frac{5}{48} & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned} P(G) &= P(U_1)P(G|U_1) + P(U_2)P(G|U_2) + P(U_3)P(G|U_3) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) \\ &= \frac{35}{72}\,. \end{aligned}$$

La probabilità $P(G_2 \cap G_1)$ di estrarre in sequenza due palline gialle dalla stessa urna è

$$\begin{aligned} P(G_2 \cap G_1) &= P(G_2 \cap G_1 \cap U_1) + P(G_2 \cap G_1 \cap U_2) + P(G_2 \cap G_1 \cap U_3) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{5}{8}\,\frac{4}{7}\right) \\ &= \frac{62}{315}\,. \end{aligned}$$

Estraendo una pallina gialla G_1, la probabilità di estrarre una seconda pallina gialla G_2 dalla stessa urna è

$$\begin{aligned} P(G_2|G_1) &= \frac{P(G_2 \cap G_1)}{P(G_1)} \\ &= \frac{62}{315}\,\frac{72}{35} \\ &= \frac{496}{1225} \end{aligned}$$