Dipartimento di Matematica Applicata

“Ulisse Dini”

Metodi Matematici per l’Ingegneria

LL.SS. Ingegneria Informatica, Ingegneria dell’Automazione 10/01/08

1) È data la tabella

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & \alpha & 2 & -1 & -2 \\ \hline y & \alpha & 2 & 7 & 4 & 11 \end{array}.$$

Determinare i valori reali di α per i quali il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo.
Calcolare il polinomio di interpolazione di grado minimo.

2) È data la matrice di transizione di una catena di Markov

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

a) La catena di Markov risulta riducibile?
b) Classificare gli stati della catena di Markov.
c) Calcolare le distribuzioni invarianti.
d) Determinare le probabilità di assorbimento.
e) Determinare i tempi medi di assorbimento.

3) Due variabili aleatorie X, Y hanno densità congiunta

$$f(x,y) = \begin{cases} K\,\frac{y}{x+1} & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{1}{2}x, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

a) Determinare la costante K.
b) Calcolare le densità marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.
c) Le variabili X e Y sono indipendenti?
d) Calcolare $P(y > 1/2)$.

Soluzione

1) Si costruisce il seguente quadro delle differenze divise riordinando opportunamente l'insieme dei dati

x	y	$DD1$	$DD2$
2	7		
-1	4	1	
-2	11	-1	2
0	α	$\frac{7-\alpha}{2}$	$\frac{5-\alpha}{2}$
α	2	$\frac{5}{\alpha-2}$	$\frac{(3+\alpha)}{(\alpha+1)(2-\alpha)}$

.

Risulta evidente come il valore $\alpha = 1$ fornisca una colonna costante per le differenze divise del secondo ordine.
Il polinomio di interpolazione risulta $P_4(x) = 2x^2 - x + 1$.

2) Indichiamo gli stati della catena con $E_i = i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La catena risulta riducibile. Si hanno due classi chiuse $\mathcal{C}^{(1)} = \{E_2\}$, $\mathcal{C}^{(2)} = \{E_1, E_3\}$ e due stati transitori $\tau = \{E_4, E_5\}$.
Le distribuzioni limite o invarianti sono due

$$\pi^{(1)} = (0, 1, 0, 0, 0)\ , \qquad \pi^{(2)} = \frac{1}{5}(2, 0, 3, 0, 0)\ .$$

Le probabilità di assorbimento sono (banalmente)

$$\lambda_4^{(1)} = \lambda_5^{(1)} = 1\ , \qquad \lambda_4^{(2)} = \lambda_5^{(2)} = 0\ .$$

I tempi medi di assorbimento sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcr} -\frac{1}{2}\eta_4 & + & \frac{1}{2}\eta_5 & = & -1 \\ \frac{1}{2}\eta_4 & - & \frac{3}{4}\eta_5 & = & -1 \end{array}$$

data da

$$\eta_4 = 10\ , \qquad \eta_5 = 8\ .$$

3) La costante K si determina imponendo $\int\int_{R^2} f(x,y)dxdy = 1$. Essendo

$$\int\int_{R^2} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx \int_0^{x/2} y\ dy = \frac{\log 3}{8}$$

si ha $K = \frac{8}{\log 3}$.
Le densità marginali sono

$$f_X(x) = \int_0^{x/2} f(x,y)dy = \frac{1}{\log 3}\frac{x^2}{x+1}\ ,$$

$$f_Y(y) = \int_{2y}^{2} f(x,y)dx = \frac{8}{\log 3} y(\log 3 - \log(2y+1)) \, .$$

Risultando $f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$ le due variabili non sono indipendenti.
La probabilità richiesta si ottiene da

$$\begin{aligned} P(y > 1/2) &= \frac{8}{\log 3} \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx \int_{1/2}^{x/2} y \, dy \\ &= \frac{1}{2 \log 3} \, . \end{aligned}$$