Dipartimento di Matematica Applicata

"Ulisse Dini"

Metodi Matematici per l'Ingegneria

Laurea Specialistica in Ingegneria Informatica **10/02/06**

1) È data la tabella

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 3 & 0 & \alpha & -2 & 2 \\ \hline f(x) & 14 & -1 & -2 & -11 & \alpha \end{array}\,, \quad \alpha \in R\,.$$

Determinare almeno un valore reale di α che rende minimo il grado del polinomio che interpola i punti assegnati. Calcolare il polinomio di interpolazione corrispondente.

2) Supponiamo di dividere i voti V ottenibili ad un esame universitario in quattro insiemi:

$$E_1 = \{18 \le v \le 23\}, \quad E_2 = \{24 \le v \le 27\},$$
$$E_3 = \{28 \le v \le 30\}, \quad E_4 = \{v = 30 \ \text{ e LODE}\}\,.$$

Se uno studente ha sostenuto un esame con voto V_1 all'esame seguente ha le seguenti probabilità di votazione V_2:

$V_1 \in E_1 \Rightarrow\ P(V_2 \in E_1) = \frac{1}{2},\ P(V_2 \in E_2) = \frac{1}{3},\ P(V_2 \in E_3) = \frac{1}{6},\ P(V_2 \in E_4) = 0;$

$V_1 \in E_2 \Rightarrow\ P(V_2 \in E_1) = \frac{1}{3},\ P(V_2 \in E_2) = \frac{1}{2},\ P(V_2 \in E_3) = \frac{3}{24},\ P(V_2 \in E_4) = \frac{1}{24};$

$V_1 \in E_3 \Rightarrow\ P(V_2 \in E_1) = \frac{1}{12},\ P(V_2 \in E_2) = \frac{1}{4},\ P(V_2 \in E_3) = \frac{1}{2},\ P(V_2 \in E_4) = \frac{1}{6};$

$V_1 \in E_4 \Rightarrow\ P(V_2 \in E_1) = 0,\ P(V_2 \in E_2) = \frac{1}{4},\ P(V_2 \in E_3) = \frac{1}{2},\ P(V_2 \in E_4) = \frac{1}{4};$

a) Costruire la matrice di transizione della catena di Markov.

b) Classificare gli stati della catena di Markov.

c) Determinare la distribuzione limite.

d) Supposto di aver preso 27 ad un esame, qual è la probabilità che dopo 2 esami si ottenga la votazione 30 e LODE?

3) Quattro persone decidono di comprare ciascuna un biglietto per assistere ad una gara delle Olimpiadi Invernali di Torino.
Il criterio di scelta della gara per la quale comprare ogni singolo biglietto è ottenuto lanciando un dado a sei facce ed optando per la **discesa libera maschile** se il numero ottenuto risulta pari, per la **partita di Hockey CANADA-GIAPPONE** se si ottiene il numero 3, per la **50 Km di sci di fondo femminile** nei casi rimanenti.

a) Qual è la probabilità che due persone si ritrovino alla **discesa libera**?

b) Qual è la probabilità che nessuno vada alla **partita di Hockey**?

c) Qual è la probabilità che almeno tre persone si rechino alla gara di **sci di fondo**?

Soluzione

1) Si costruisce il quadro delle differenze divise

x	$f(x)$	$DD1$	$DD2$	$DD3$
3	14	$--$	$--$	$--$
0	-1	5	$--$	$--$
-2	-11	5	0	$--$
2	α	$14-\alpha$	$(9-\alpha)/2$	$(9-\alpha)/8$
α	-2	$16/(3-\alpha)$	$(1+5\alpha)/(\alpha(3-\alpha))$	$(1+5\alpha)/(\alpha(\alpha+2)(3-\alpha))$

.

Il polinomio di interpolazione risulta di grado minimo se per i valori di α che rendono costante la colonna relativa alle differenze divise DD3 per cui se α è soluzione dell'equazione

$$\frac{9-\alpha}{8} = \frac{1+5\alpha}{\alpha(\alpha+2)(3-\alpha)}$$

e quindi se risolve l'equazione $\alpha^4 - 10\alpha^3 + 3\alpha^2 + 14\alpha - 8 = 0$.
Una radice dell'equazione è $\alpha_1 = 1$ ed il relativo polinomio di interpolazione risulta $P_4(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.
(Altri valori di α che soddisfano la richiesta sono $\alpha_2 \simeq -1.225297$, $\alpha_3 \simeq 0.684313$ e $\alpha_4 \simeq 9.540983$)

2) La matrice di transizione è

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 3/24 & 1/24 \\ 1/12 & 1/4 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} .$$

La catena risulta irriducibile e gli stati (E_1, E_2, E_3, E_4) sono tutti transitori.
La distribuzione limite π che verifica $\pi = \pi T$ é

$$\pi = \frac{1}{427}(123, 156, 114, 34) .$$

Posto $\pi^{(0)} = (0, 1, 0, 0)$, riulta $\pi^{(2)} = \left(\frac{11}{32}, \frac{29}{72}, \frac{29}{144}, \frac{5}{96}\right)$ per cui la probabilità richiesta è $5/96$.

3) Indicando con DLM, HOC e FON le tre variabili aleatorie indicanti, rispettivamente se si compra un bilgietto per la Discesa Libera Maschile, la partita di Hockey e la gara di Fondo, si ha

$$DLM \sim B(4, 1/2), \quad HOC \sim B(4, 1/6), \quad FON \sim B(4, 1/3) .$$

Si ha quindi

$$P(DLM = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8} .$$

$$P(HOC = 0) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} .$$

$$P(FON \geq 3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{9} .$$