# Le système de ondes de surface

d'après T.Alazard-N.Burq-C. Zuily

Le modèle se propose d'étudier la propagation des ondes à la surface d'un fluide occupant un domaine à frontière libre. On peut penser à la surface d'un océan ou d'un lac. Dans ce modèle le fluide sera supposé

1. soumis à la force de gravitation,
2. posséder (ou non) une tension de surface,
3. incompressible,
4. irrotationnel.

## 1 Les équations

prelim

Le domaine occupé par le fluide sera noté $\Omega$; ce sera un sous ensemble de $\mathbf{R}^{d+1}$. La surface du fluide notée $\Sigma$ est de dimension $d$.

On travaillera dans une base $(e_1, \dots, e_{d+1})$ pour laquelle $e_{d+1}$ est un vecteur vertical.

On désignera par $X(t) = (X_1(t), \dots, X_{d+1}(t))$ la position d'une particule de fluide à l'instant $t$ et $v = (v_1, \dots, v_{d+1})$ sa vitesse. Elles sont liées par les équations

vitesse (1.1) $$\dot{X}_j(t) = v_j(t, X(t)), \quad j = 1, \dots, d+1.$$

#### 1.0.1 L'équation du mouvement

La première équation du modèle traduit la loi de Newton qui affirme que l'accéleration (qui est égale $\ddot{X}(t)$) est proportionnelle aux forces auxquelles sont soumises les particules. Utilisant (1.1) on voit que

$$\begin{aligned}\ddot{X}_j(t) &= \frac{\partial v_j}{\partial t}(t, X(t)) + \sum_{k=1}^{d+1} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(t, X(t)) \dot{X}_k(t) \\ &= \Big(\frac{\partial v_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{d+1} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\Big)(t, X(t)) = \Big(\frac{\partial v_j}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) v_j\Big)(t, X(t)).\end{aligned}$$

Les forces auxquelles sont soumises les particules de fluide sont d'une part le gradient de pression et d'autre part la gravité. Celle-ci s'exerçant vers le bas, on aura

$$F = -\nabla P - g e_{d+1}$$

où $P$ est la pression (contenant ou pas la tension de surface) et $g$ l'accéleration de la gravité.

Le premier système d'équations est donc

euler
$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) v = -\nabla P - g e_{d+1} \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.2}$$

On reconnait les équations d'Euler.

### 1.0.2 L'incompressibilité.

C'est une notion physique qui exprime le fait qu'infinitésimalement le volume occupé par le fluide ne change pas. Nous allons montrer que mathématiquement cela se traduit par l'équation

incompre
$$\operatorname{div} v =: \sum_{j=1}^{d+1} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.3}$$

Pour cela on commence par énoncer le résultat suivant. Notons $M(n, \mathbf{R})$ l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients réels.

eqdiff
**Lemme 1.1.** *Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, $A \in C^0(I, M(n, \mathbf{R}))$, $B \in C^1(I, M(n, \mathbf{R}))$, $t_0 \in I$ et $\Delta(t) = \det B(t)$. Supposons que $\frac{dB}{dt}(t) = A(t)B(t)$. Alors*

$$\frac{d\Delta}{dt}(t) = \Delta(t)\, Tr\,(A(t))$$

*où $Tr$ désigne la trace, de sorte que $\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp\Big(\int_{t_0}^t Tr\ (A(s))\, ds\Big)$.*

*Proof.* On a $\frac{d\Delta}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \det\big(l_1(t), \dots, l_i'(t), \dots, l_n(t)\big)$ où $l_i(t)$ désigne la $i-$ème ligne de la matrice $B(t) = (b_{ij}(t))$. Développons chaque determinant de la somme par rapport à la $i-$ème ligne. En notant cof le cofacteur on obtient

det1
$$\frac{d\Delta}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \dot{b}_{ik}(t) \operatorname{cof}(b_{ik}(t)) \tag{1.4}$$

Nous allons montrer que

det2
$$\frac{d\Delta}{dt}(t) = \operatorname{Tr}\big(\dot{B}(t) \operatorname{adj}(B(t))\big) \tag{1.5}$$

où $\operatorname{adj}(B(t)) = {}^t(\operatorname{cof}(b_{ik}(t)))$ est la matrice adjointe de la matrice $B(t)$.

En effet si $c_{ij} = \operatorname{cof}(b_{ij})$ et $\operatorname{adj}(B) = (d_{ij})$ on a $d_{ij} = c_{ji} = \operatorname{cof}(b_{ji})$ de sorte que

$$\Big(\frac{dB}{dt}(t) \operatorname{adj}(B(t))\Big)_{ij} = \sum_{k=1}^n \dot{b}_{ik}(t)\, d_{kj}(t) = \sum_{k=1}^n \dot{b}_{ik}(t) \operatorname{cof}(b_{jk})(t).$$

Alors
$$\mathrm{Tr}\Big(\frac{dB}{dt}\,\mathrm{adj}(B(t))\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \dot b_{ik}(t)\,\mathrm{cof}(b_{ik}(t))$$
de sorte que (1.5) résulte de (1.4).

Comme par hypothèse $\frac{dB}{dt} = A(t)B(t)$ et que $B(t)\,\mathrm{adj}(B(t) = \det B(t) Id = \Delta(t) Id$ il résulte de (1.5) que
$$\frac{d\Delta}{dt}(t) = \mathrm{Tr}\big(A(t)\,B(t)\,\mathrm{adj}(B(t)\big) = \Delta(t)\,\mathrm{Tr}(A(t))$$
ce qui, par intégration de l'équation différentielle, implique le lemme. $\square$

Ensuite si $X(t,y)$ est la position de la particule à l'instant $t$ avec $X(0,y) = y$, en dérivant l'équation (1.1) par rapport à $y$ et en notant $B(t) = \Big(\frac{\partial X_j}{\partial y_k}(t,x)\Big)$, $A(t) = \Big(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(t, X(t,x))\Big)$ on voit facilement que
$$\frac{dB}{dt}(t) = A(t)B(t), \quad B(0) = Id.$$
Puisque $\mathrm{Tr}(A(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial X_j}(t, X(t)) = \mathrm{div}\, v(t, X(t))$ il résulte du Lemme 1.1 que

Delta=
$$\det\Big(\frac{\partial X}{\partial y}(t,y)\Big) = \exp\Big(\int_0^t \mathrm{div}\, v(s, X(s,y))\,ds\Big). \tag{1.6}$$

diffeo **Corollaire 1.2.** *Soit $t_0 \in \mathbf{R}, \mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbf{R}^d$, $\Phi$ l'application $y \mapsto X(t_0, y)$ et $\Omega = \Phi(\mathcal{O})$. Alors $\Phi$ est un difféomorphisme de $\mathcal{O}$ dans $\Omega$.*

*Proof.* D'après (1.6) et le théorème d'inversion locale il suffit de montrer qu'elle est injective. Supposons que $X(t_0, y) = X(t_0, y')$. Posons $E = \{t \in [0,T] : X(t,y) = X(t,y')\}$. Par hypothèse $t_0 \in E$. D'aute part par continuité $E$ est fermé. Montrons qu'il est ouvert dans $[0,T]$. Soit $\bar t \in E$ et considérons les systèmes différentiels (en notant $\dot f = \frac{df}{dt}$)

syst1
$$\dot Y(t) = v(t, Y(t)), \quad Y(0) = X(\bar t, y), \tag{1.7}$$
syst2
$$\dot Z(t) = v(t, Z(t)), \quad Z(0) = X(\bar t, y'). \tag{1.8}$$

Comme $\bar t \in E$ on a $X(\bar t, y) = X(\bar t, y')$. L'unicité des solutions de ce système implique qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Y(t) = Z(t)$ pour $|t - \bar t| \leq \varepsilon$. Or $X(t,y)$ est l'unique solution de (1.7) et $X(t,y')$ est l'unique solution de (1.8). On a donc $X(t,y) = X(t,y')$ pour $|t - \bar t| \leq \varepsilon$ ce qui montre que $B(\bar t, \varepsilon) \subset E$. On en déduit que $E = [0,T]$ i.e. $0 \in E$ et donc $y = y'$. $\square$

Revenons au problème de l'incompressibilité.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert occupé par le fluide à l'instant $t_0$. Au temps $t_0 + h, h > 0$ le fluide issu de $\mathcal{O}$ occupe l'ouvert $\mathcal{O}_h = \{X(t_0 + h, y) : y \in \mathcal{O}\}$ dont le volume est alors $V(h) = \int_{\mathcal{O}_h} dx$. D'après le Corollaire 1.2 on peut poser $x = X(t_0 + h, y)$ de sorte que $dx = \Big|\det\Big(\frac{\partial X}{\partial y}(t_0 + h, y)\Big)\Big|\,dy = \det\Big(\frac{\partial X}{\partial y}(t_0 + h, y)\Big)\,dy = \Delta(t_0 + h, y)\,dy$ d'après (1.6). Alors
$$V(h) = \int_{\mathcal{O}} \Delta(t_0 + h, y)\,dy.$$

D'après le Lemme 1.1 et (1.6) on a

$$\frac{dV}{dh}(h) = \int_{\mathcal{O}} \big(\frac{d\Delta}{dt}\big)(t_0+h,y)\,dy = \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div} v(t_0+h, X(t_0+h,y))\Delta(t_0+h,y)\,dy.$$

Par conséquent si $\operatorname{div} v = 0$ on a $V(h) = \mu(\mathcal{O})$. Inversement si il existe $(t_0, x_0)$ tel que $\operatorname{div} v(t_0, x_0) \neq 0$ il existe un ouvert $\mathcal{O}$ tel que $\operatorname{div} v(t_0, X(t_0, y)) \neq 0, \forall y \in \mathcal{O}$ (par exemple$>0$) et alors

$$\int_{\mathcal{O}} \operatorname{div} v(t_0, X(t_0,y))\Delta(t_0,y)\,dy > 0$$

et donc $\frac{dV}{dh}(0) > 0$, ce qui montre que $\mu(\mathcal{O}_h) > \mu(\mathcal{O})$ pour $h > 0$ petit.

### 1.0.3 L'irrotationalité

Elle s'exprime mathématiquement par la formule

irrota

$$\operatorname{rot} v = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{1.9}$$

### 1.0.4 Les conditions au bord

Comme il a été dit, le bord supérieur $\Sigma$ de l'ouvert $\Omega$ est une inconnue du problème. On supposera dans ce qui suit que ce bord est le graphe d'une fonction. On notera $X = (x, y)$ où $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d, y = x_{d+1} \in \mathbf{R}$ de sorte que

sigma

$$\begin{aligned} \Sigma(t) &= \{(x,y) \in \mathbf{R}^{d+1} : y = \eta(t,x)\} \\ \Sigma &= \{(t,x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{d+1} : (x,y) \in \Sigma(t)\}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

- **La condition cinematique**. Elle exprime le fait que toute particule qui à l'instant $t = 0$ est sur la surface reste pour tout temps ultérieur sur la surface. Ceci se traduit mathématiquement par l'équation

  cinema

  $$\partial_t \eta = \sqrt{1 + |\nabla_x \eta|^2}\,(v \cdot n) \quad \text{sur } \Sigma, \tag{1.11}$$

  où $n$ désigne la normale unitaire extérieure à $\Sigma$.

Notons que $n(t,x) = (1 + |\nabla_x \eta(t,x)|^2)^{-\frac{1}{2}}(1, -\nabla_x \eta(t,x))$.

Introduisons la fonction $\Phi(t) = y(t) - \eta(t, x(t))$ (où $X(t) = (x(t), y(t))$) et supposons que $X(0) \in \Sigma(0)$. Alors $\Phi(0) = 0$. Ensuite en notant $(v_x, v_y)$ les composantes de la vitesse on a

$$\begin{aligned} \dot\Phi(t) &= \dot y(t) - \partial_t \eta(t, x(t)) - \nabla_x \eta(t, x(t)) \cdot \dot x(t) \\ &= v_y\big(t, X(t)\big) - \partial_t \eta(t, x(t)) - \nabla_x \eta(t, x(t)) \cdot v_x(t, X(t)\big) \\ &= v_y\big(t, x(t), \Phi(t) + \eta(t, x(t))\big) - \partial_t \eta(t, x(t)) - \nabla_x \eta(t, x(t)) \cdot v_x\big(t, x(t), \Phi(t) + \eta(t, x(t))\big) \\ &= F(t, \Phi(t)). \end{aligned}$$

On a

$$F(t,0) = -\partial_t \eta(t,x(t)) + \sqrt{1+|\nabla_x \eta(t,x)|^2}(v(t,x,\eta(t,x)))\cdot n(t,x))|_{x=x(t)},$$

de sorte que si l'équation (1.11) est vérifiée on a $F(t,0)=0$. En résumé

$$\dot{\Phi}(t) = F(t,\Phi(t)), \quad \Phi(0) = 0, \quad F(t,0) = 0.$$

Alors $\Phi \equiv 0$ est l'unique solution de ce problème, ce qui montre que tant que $X(t)$ existe on a $y(t) = \eta(t,x(t))$ i.e. $X(t) \in \Sigma(t)$. Inversement si $\Phi(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ alors $\dot{\Phi}(t) \equiv 0$ et par le calcul ci-dessus (1.11) est vérifiée.

- **La condition dynamique**: elle exprime une balance des forces à travers la surface libre.

dyna (1.12)
$$P = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

- **La condition sur le fond**: on supposera que le fluide se meut parallèlement au fond. Lorsque le fond est régulier, en notant $\nu$ la normale unitaire à $\Gamma$, on supposera

neumann (1.13)
$$v\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Nous reviendrons plus loin sur cette condition.

En résumé le système en $(\eta, v)$ est le suivant

syst:euler (1.14)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla_x)v = -\nabla P - g e_{d+1} \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_t \eta = \sqrt{1+|\nabla_x \eta|^2}\,(v\cdot n) \quad \text{sur } \Sigma, \\ \operatorname{div} v = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{rot} v = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ P = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ v\cdot\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

## 2 La formulation de Craig-Sulem-Zakharov

Au lieu de considérer le système (1.14) ces auteurs proposent l'approche suivante. Elle est formelle c'est à dire qu'elle suppose a-priori que tout ce qui est écrit a un sens.
Comme $\operatorname{div} v = 0$ et $\operatorname{rot} v = 0$ le champ de vitesses $v$ dérive d'un potentiel i.e. il existe une fonction $\phi$ définie sur $\Omega$ telle que

$$v = \nabla_{x,y}\phi.$$

De plus, comme $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta_{x,y}$ la condition (1.3) montre que la fonction $\phi$ est harmonique i.e. $\Delta_{x,y}\phi = 0$ dans $\Omega$. Introduisons la trace de la fonction $\phi$ sur la surface libre i.e. posons

psi (2.1)
$$\psi(t,x) = \phi(t,x,\eta(t,x)).$$

Très schématiquement l'idée de ces auteurs est qu'au lieu de résoudre le problème en $(\eta, v)$ on pourrait résoudre le problème en $(\eta, \psi)$ puis, la surface libre étant déterminée et la trace de $\phi$ étant connue, on pourrait récuperer la fonction harmonique $\phi$ (comme solution d'un problème de Dirichlet sur $\Sigma$ et Neumann sur $\Gamma$) puis la vitesse $v$. L'avantage étant que $(\eta, \psi)$ sont des fonctions sur le bord donc dépendent d'une variable de moins.

Il faut néammoins remarquer que le procédé de retour suggéré est loin d'être trivial (surtout à basse régularité) en particulier parce que comme nous le verrons la pression disparaitra du système en $(\eta, \psi)$ et qu'il faudra donc la reconstruire.

Nous allons détailler cette approche et décrire les nouvelles équations que l'on obtient.

Commençons par l'équation (1.11). Comme $v \cdot n = \nabla_{x,y}\phi \cdot n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$ elle s'écrit

$$\partial_t \eta = \sqrt{1 + |\nabla_x \eta|^2}\, \frac{\partial \phi}{\partial n}|_\Sigma.$$

On introduit alors la définition suivante.

DN **Definition 2.1.** *L'application* $\psi = \phi|_\Sigma \mapsto \sqrt{1+|\nabla_x\eta|^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial n}|_\Sigma$ *est notée* $\psi \mapsto G(\eta)\psi$ *et est appelée* **"opérateur de Dirichlet-Neumann"**.

exemple **Exemple 2.2.** Lorsque $\eta = 0$ i.e. la surface initiale est $\{y = 0\}$ et $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}^d, -h < y < 0\}$ où $h > 0$ est une constante, on a

$$G(0)\psi = a(D)\psi$$

où $a(\xi) = |\xi|\mathrm{th}(h|\xi|)$, th étant la tangente hyperbolique. En effet nous avons à résoudre

diri (2.2)
$$\Delta_{x,y}\phi = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \phi|_{y=0} = \psi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}|_{\{y=-h\}} = 0 \tag{2.2}$$

et $G(0)\psi = \frac{\partial\phi}{\partial y}|_{y=0}$. Ce problème est variationnel et admet pour $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ une unique solution $\phi \in H^1(\Omega)$ (utiliser le lemme de Lax-Milgram et l'inégalité de Poincaré). Comme $\phi \in L^2((-h, 0), H^1(\mathbf{R}^d))$ et $\partial_y\phi \in L^2((-h, 0), L^2(\mathbf{R}^d))$ on a $\phi \in C^0([-h, 0], H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$. On peut donc appliquer une transformée de Fourier en $x$ à l'équation. Notant $\widehat{\phi}(\xi, y)$ la transformée de Fourier en $x$ de $\phi$ on voit que $\partial_y^2\widehat{\phi} - |\xi|^2\widehat{\phi} = 0$ d'où

$$\widehat{\phi}(\xi, y) = C_1(\xi)e^{-y|\xi|} + C_2(\xi)e^{y|\xi|}.$$

Les conditions aux limites montrent que

$$C_1(\xi) + C_2(\xi) = \widehat{\psi}(\xi), \quad -|\xi|C_1(\xi)e^{h|\xi|} + |\xi|C_2(\xi)e^{-h|\xi|} = 0$$

d'où l'on tire

$$C_1(\xi) = \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{1 + e^{2h|\xi|}}, \quad C_2(\xi) = \frac{e^{2h|\xi|}\widehat{\psi}(\xi)}{1 + e^{2h|\xi|}}.$$

Par conséquent

$$\widehat{G(0)\psi}(\xi) = \frac{\partial\widehat{\phi}}{\partial y}(\xi, y)|_{y=0} = -|\xi|(C_2(\xi) - C_1(\xi)) = |\xi|\mathrm{th}\,(h|\xi|)\widehat{\psi}(\xi),$$

ce qui prouve le résultat.

Un calcul identique montre que lorsque $\Omega = \{(x,y) : x \in \mathbf{R}^d, y > 0\}$ i.e. $\eta = 0$ et il n'y a pas de fond, on a $G(0)\psi = |D_x|\psi$. Dans ce cas il faut résoudre le problème (4.2) avec la condition $\frac{\partial \phi}{\partial y} \to 0$ lorsque $y \to -\infty$.

Revenons à nos équations. Avec cette notation (1.11) s' écrit

D-N
$$\partial_t \eta = G(\eta)\psi. \tag{2.3}$$

Traduisons maintenant les équations (1.2). On voit facilement que si $v = \nabla_{x,y}\phi$ on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big\{\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + gy + P\Big\} = 0, \quad 1 \leq j \leq d+1,$$

en notant $y = x_{d+1}$. Quitte à modifier $P$ par une constante on en déduit que

eqphi
$$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + gy + P = 0, \quad \text{dans } \Omega. \tag{2.4}$$

Le système en $(\eta, \phi)$ est alors le suivant

syst:euler2
$$\begin{cases} \partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + gy + P = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \partial_t \eta = G(\eta)\psi, \\ \Delta_{x,y}\phi = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ P = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{2.5}$$

Nous allons en déduire une équation sur $\psi$. Comme $\psi(t,x) = \phi(t,x,\eta(t,x))$ on a,

eq1
$$\partial_t \psi = \big(\partial_t \phi + \partial_y \phi \, \partial_t \eta\big)|_\Sigma = \big(\partial_t \phi + \partial_y \phi \, G(\eta)\psi\big)|_\Sigma, \tag{2.6}$$

eq2
$$\nabla_x \psi = \big(\nabla_x \phi + \partial_y \phi \, \nabla_x \eta\big)|_\Sigma. \tag{2.7}$$

D'autre part, comme $n = (1, -\nabla_x \eta)$ on déduit de la definition 2.1 que

eq3
$$G(\eta)\psi = \big(\partial_y \phi - \nabla_x \phi \cdot \nabla_x \eta\big)|_\Sigma. \tag{2.8}$$

On déduit de (2.7) que

$$\nabla_x \psi \cdot \nabla_x \eta = \big(\nabla_x \phi \cdot \nabla_x \eta + \partial_y \phi |\nabla_x \eta|^2\big)|_\Sigma,$$

d'où, en utilisant (2.8)

eq4
$$(1 + |\nabla_x \eta|^2)\, \partial_y \phi|_\Sigma = \nabla_x \psi \cdot \nabla_x \eta + G(\eta)\psi. \tag{2.9}$$

On déduit de (2.7) que

eq5
$$\nabla_x \phi|_\Sigma = \nabla_x \psi - \frac{\nabla_x \psi \cdot \nabla_x \eta + G(\eta)\psi}{1 + |\nabla_x \eta|^2}\, \nabla_x \eta. \tag{2.10}$$

Il résulte de (2.9) et (2.10) que

eq6
$$|\nabla_{x,y}\phi|^2|_\Sigma = \frac{(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi)^2}{1+|\nabla_x\eta|^2} + |\nabla_x\psi|^2 - 2\frac{\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi}{1+|\nabla_x\eta|^2}(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta). \tag{2.11}$$

D'après la condition (1.12) on a

$$0 = \big(\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + gy + P\big)|_\Sigma = \big(\partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + gy\big)|_\Sigma.$$

On déduit de (2.4), (2.7), (2.9), (2.11) que

$$\begin{aligned} 0 = \partial_t\psi - \frac{\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi}{1+|\nabla_x\eta|^2}G(\eta)\psi + \frac{1}{2}\frac{(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi)^2}{1+|\nabla_x\eta|^2} \\ + \frac{1}{2}|\nabla_x\psi|^2 - \frac{\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi}{1+|\nabla_x\eta|^2}(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta) + g\eta \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\partial_t\psi + \frac{1}{2}|\nabla_x\psi|^2 - \frac{1}{2}\frac{(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi)^2}{1+|\nabla_x\eta|^2} + g\eta = 0.$$

En résumé le système vérifié par $(\eta,\psi)$ est le suivant

CSZ
$$\begin{cases} \partial_t\eta = G(\eta)\psi, \\ \partial_t\psi = -\frac{1}{2}|\nabla_x\psi|^2 + \frac{1}{2}\frac{(\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi)^2}{1+|\nabla_x\eta|^2} - g\eta. \end{cases} \tag{2.12}$$

Dans la littérature celui-ci est souvent appelé "système des ondes de gravité " ("gravity water waves", en anglais). C'est un système non linéaire et non local (cf. exemple 2.2).

Comme nous l'avons déjà dit, le fait de démontrer que la résolution de ce système permet de trouver une solution $(\eta, v)$ du système (1.14) n'est pas immédiat, en particulier parce que, comme on le voit, la pression a disparu de (2.12).

L'objectif de ces notes est de développer une théorie de Cauchy pour ces systèmes lorsque les données initiales (à $t=0$) sont peu régulières. Nous utiliserons pour cela les outils de l'analyse microlocale dans un cadre peu régulier c'est à dire, en particulier, la théorie de J.M.Bony ([1]) des opérateurs paradifférentiels.

Pour terminer notons qu'il résulte de (2.9), (2.10) que

def:BV
$$\begin{cases} B := (\partial_y\phi)|_\Sigma = \dfrac{\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta + G(\eta)\psi}{1+|\nabla_x\eta|^2} \\ V := (\nabla_x\phi)|_\Sigma = \nabla_x\psi - B\nabla_x\eta. \end{cases} \tag{2.13}$$

# 3 Le résultat principal

section:princ

Le but de ces notes est de prouver le résultat suivant.

theo:princ **Théorème 3.1.** *Soit $d \geq 1, s > 1 + \frac{d}{2}$ et considérons une donnée $(\eta_0, \psi_0)$ telle que*

$$\eta_0 \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d), \quad \psi_0 \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d), \quad V_0 \in H^s(\mathbf{R}^d), \quad B_0 \in H^s(\mathbf{R}^d).$$

*Il existe $T > 0$ tel que le problème de Cauchy pour le système (2.12), avec donnée $(\eta_0, \psi_0)$ à $t = 0$, admet une solution unique $(\eta, \psi) \in C^0([0, T], H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$ telle que*

$$(V, B) \in C^0([0, T], H^s(\mathbf{R}^d) \times H^s(\mathbf{R}^d)).$$

### 3.1 Commentaires

1. Nous avons considéré ici, pour simplifier, un domaine sans fond mais le cas où il y a un fond est aussi intéressant et peut être traité par exactement les mêmes méthodes. En fait nos travaux montrent que l'on peut prendre un fond fixe mais très irrégulier sans que cela ne change la nature des résultats. La présence du fond oblige néammoins à faire une hypothèse sur le coefficient de Taylor qui exprime le fait que la pression augmente en passant de l'air (au dessus de la surface) à l'eau (en dessous).

2. Si $\psi_0 = 0$ on a $B_0 = 0, V_0 = 0$ de sorte que la seule hypothèse à faire porte sur $\eta_0$.

3. Comme il est montré dans la Proposition 10.39, le système des ondes de surface est invariant par un certain changement d'échelle. L'espace critique pour $\eta_0$ est alors $\dot{H}^{s_0+\frac{1}{2}}$ avec $s_0 = \frac{1}{2} + \frac{d}{2}$. Le résultat ci-dessus montre que nous sommes $\frac{1}{2}$ dérivée au dessus de l'indice critique.

4. Le système des ondes de surface possède des propriétés dispersives exprimées par des estimations de Strichartz. Elles permettent de descendre un peu au dessous du seuil $1 + \frac{d}{2}$ en supposant $s > 1 + \frac{d}{2} - \frac{1}{12}$.

5. On a la même théorie dans les espaces de Sobolev uniformeément locaux introduits par T.Kato. Ceux-ci ont l'avantage de contenir les données périodiques et de ne pas supposer par exemple que $\eta$ tend vers zégo à l'infini.

## 4 L'opérateur de Dirichlet-Neuman

On posera dans ce qui suit

omega (4.1) $$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} : y < \eta(x)\}, \quad \Sigma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} : y = \eta(x)\}.$$

Très formellement l'opérateur de Dirichlet-Neuman est ainsi défini. Pour $\psi = \psi(x)$ on pose

$$G(\eta)\psi(x) = \sqrt{1 + |\nabla_x \eta(x)|^2} (\frac{\partial \phi}{\partial n})|_\Sigma$$

où $\phi$ est "la" solution naturelle du problème de Dirichlet

diri (4.2) $$\Delta_{x,y}\phi = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \phi|_\Sigma = \psi$$

et $\frac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale unitaire au bord.

Bien entendu tout cela est formel et il nous faudra préciser l'existence de $\phi$ et ensuite celle de sa dérivée normale au bord. Nous montrerons dans ce qui suit que ce programme peut être réalisé dès que $\eta$ est Lipschitzienne.

## 4.1 Le problème de Dirichlet.

Dir

On se propose dans ce paragraphe de résoudre le problème de Dirichlet dans $\Omega$. On commence par prouver une inégalité de type "Poincaré".

poincare **Proposition 4.1.** *Soit $\sigma > 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\iint_\Omega \langle y-\eta(x)\rangle^{-2\sigma}|u(x,y)|^2\,dx\,dy \leq C\iint_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|^2\,dx\,dy$$

*pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$.*

*Démonstration.* Pour $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a $u(x,y) = -\int_y^{\eta(x)} \frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\,dt$. L'inégalité de Hölder fournit

$$|u(x,y)|^2 \leq |y-\eta(x)|\int_{-\infty}^{\eta(x)}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right|^2\,dt.$$

Alors

$$\langle y-\eta(x)\rangle^{-2\sigma}|u(x,y)|^2 \leq \frac{1}{\langle y-\eta(x)\rangle^{2\sigma-1}}\int_{-\infty}^{\eta(x)}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right|^2\,dt.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\iint_\Omega \langle y-\eta(x)\rangle^{-2\sigma}|u(x,y)|^2\,dx\,dy &\leq \int_{\mathbf{R}^d}\Big(\int_{-\infty}^{\eta(x)}\frac{dy}{\langle y-\eta(x)\rangle^{2\sigma-1}}\Big)\Big(\int_{-\infty}^{\eta(x)}\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right|^2\,dt\Big)dx\\ &\leq C\iint_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\right|^2\,dx\,dt\end{aligned}$$

puisque $2\sigma - 1 > 1$. □

On considérera dans ce qui suit la norme

N(u) (4.3) $$\mathcal{N}(u) = \Big(\|\langle y-\eta(x)\rangle^{-\sigma}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_{x,y}u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

et on notera $H^{1,0}(\Omega)$ l'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ pour cette norme. On a alors facilement le résultat suivant.

poincare2 **Corollaire 4.2.** *Soit $\sigma > 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\iint_\Omega \langle y-\eta(x)\rangle^{-2\sigma}|u(x,y)|^2\,dx\,dy \leq C\iint_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|^2\,dx\,dy$$

*pour tout $u \in H^{1,0}(\Omega)$.*

On considère maintenant la forme sesquilinéaire

prodscal (4.4)
$$((u,v)) = \big(\nabla_{x,y}u, \nabla_{x,y}v\big)_{L^2(\Omega)}.$$

hilbert **Proposition 4.3.** *1. La quantité $((u,v))$ est un produit scalaire sur l'espace $H^{1,0}(\Omega)$.*

*2. Muni de ce produit scalaire l'espace $H^{1,0}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

*3. Sur $H^{1,0}(\Omega)$ les normes $\mathcal{N}(u)$ et $((u,u))^{\frac{1}{2}}$ sont équivalentes.*

*Démonstration.* 1. Il suffit de montrer que si $u \in H^{1,0}(\Omega)$ et $((u,u)) = 0$ on a $u = 0$. Mais cela résulte du Corollaire 4.2.
2. Soit $(u)_k$ une suite de Cauchy pour la norme $((u,u))^{\frac{1}{2}}$. Alors la suite $(\nabla_{x,y}u_k)_k$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. Il existe donc $v \in L^2(\Omega)$ telle que $\nabla_{x,y}u_k \to v$ dans $L^2(\Omega)$. D'autre part d'après le Corollaire 4.2 la suite $(\langle y-\eta(x)\rangle^{-\sigma}u_k)$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, il existe donc $\widetilde{u} \in L^2(\Omega)$ telle que $\langle y-\eta(x)\rangle^{-\sigma}u_k \to \widetilde{u}$ dans $L^2(\Omega)$. Posons $\widetilde{u} = \langle y-\eta(x)\rangle^{-\sigma}u$ alors $\iint_\Omega \langle y-\eta(x)\rangle^{-2\sigma}|u_k-u|^2\,dxdy \to 0$. Ceci implique que $u_k \to u$ dans $L^2_{loc}(\Omega)$. En effet si $K$ est un compact de $\Omega$ et $(x,y)\in K$ on a $C_1 \leq \langle y-\eta(x)\rangle^{-2\sigma} \leq C_2$. Comme la convergence $L^2_{loc}$ implique la convergence distribution on a $u_k \to u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On en déduit que $\nabla_{x,y}u_k \to \nabla_{x,y}u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ceci implique que $\nabla_{x,y}u = v \in L^2(\Omega)$. En résumé $\mathcal{N}(u_k-u)$ tend vers zéro lorsque $k$ tend vers l'infini.Il reste à monter que $u \in H^{1,0}(\Omega)$. Pour $\varepsilon_j = \frac{1}{2^j}$ il existe $k_j$ tel que $\mathcal{N}(u_{k_j}-u) \leq \varepsilon_j$. Comme $u_{k_j} \in H^{1,0}(\Omega)$ il existe $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\mathcal{N}(u_{k_j}-\varphi_j) \leq \varepsilon_j$. Alors $\mathcal{N}(u-\varphi_j) \leq 2\varepsilon_j$ et donc $u \in H^{1,0}(\Omega)$.
3. Ceci résulte du Corollaire 4.2. □

On déduit de ci-dessus que $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans l'espace $H^{1,0}(\Omega)$ pour la norme $((\cdot,\cdot))^{\frac{1}{2}}$. Son dual est donc un espace de distributions et le lemme de représentation des formes linéaires sur un Hilbert implique que

Lax-Mil (4.5)
$$\forall f \in \big(H^{1,0}(\Omega)\big)' \quad \exists!\ u \in H^{1,0}(\Omega) : f(v) = ((v,u)), \quad \forall v \in H^{1,0}(\Omega).$$

prolonge **Lemme 4.4.** *Soit $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$. Il existe $\underline{\psi} \in H^1(\Omega)$ telle que*

1. $\underline{\psi}|_\Sigma = \psi$,
2. $\underline{\psi} = 0$ *si* $y \leq \eta(x) - 1$,
3. $\|\underline{\psi}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(1+\|\nabla_x\eta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}$.

*Démonstration.* Notons $\mathbf{R}^{d+1}_- = \{(x,z) : x \in \mathbf{R}^d, z < 0\}$ et considérons la fonction

$$\widetilde{\underline{\psi}}(x,z) = \chi(z)e^{z\langle D_x\rangle}\psi, \quad x \in \mathbf{R}^d, z < 0$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}), \chi(z) = 1$ si $z \geq -\frac{1}{2}, \chi(z) = 0$ si $z \leq -1$.

Nous allons montrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|\widetilde{\underline{\psi}}\|_{H^1(\mathbf{R}^{d+1}_-)} \leq C\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}.$$

En effet comme $e^{z\langle\xi\rangle} \leq 1$ pour $z < 0$ on voit facilement que $\|\widetilde{\underline{\psi}}\|_{L^2(\mathbf{R}^{d+1}_-)} \leq C\|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}$. Ensuite

est:psi1
$$\|\nabla_x \widetilde{\underline{\psi}}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^{d+1}_-)} \leq C \int_{\mathbf{R}^d} \Big( \int_{-\infty}^0 e^{2z\langle\xi\rangle}\, dz \Big) |\xi|^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \leq C' \|\psi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}. \tag{4.6}$$

Enfin comme $\partial_z \widetilde{\underline{\psi}} = \chi'(z) e^{z\langle D_x\rangle}\psi + \chi(z)\langle D_x\rangle e^{z\langle D_x\rangle}\psi$, le même calcul que ci-dessus montre que

est:psi2
$$\|\partial_z \widetilde{\underline{\psi}}\|^2_{L^2(\mathbf{R}^{d+1}_-)} \leq C \|\psi\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)} \tag{4.7}$$

En fait la même démonstration fournit le résultat plus général suivant.

est:psitilde
**Lemme 4.5.** *Soit $k \in \mathbf{N}$ et $s \in \mathbf{R}$. Il existe $C > 0$ telle que pour $j + |\alpha| = k$ on ait*

$$\|D_z^j D_x^\alpha \widetilde{\underline{\psi}}\|_{L^2((-\infty,0),H^s(\mathbf{R}^d))} \leq C\|\psi\|_{H^{s+k-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}.$$

Posons alors pour $(x,y) \in \Omega$,

$$\underline{\psi}(x,y) = \widetilde{\underline{\psi}}(x, y - \eta(x)).$$

On vérifie très facilement que $\underline{\psi}$ satisfait à toutes les conditions du lemme. $\square$

Maintenant si $\underline{\psi} \in H^1(\Omega), \nabla_{x,y}\underline{\psi}$ définit une forme linéaire continue sur $H^{1,0}(\Omega)$ par

formelin
$$\langle \nabla_{x,y}\underline{\psi}, v\rangle = \iint_\Omega \nabla_{x,y}\underline{\psi}(x,y) \cdot \nabla_{x,y} v(x,y)\, dxdy \quad v \in H^{1,0}(\Omega). \tag{4.8}$$

En effet le second membre de (4.8) est majoré par

$$\|\nabla_{x,y}\underline{\psi}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_{x,y} v\|_{L^2(\Omega)} = \|\nabla_{x,y}\underline{\psi}\|_{L^2(\Omega)} ((v,v))^{\frac{1}{2}}.$$

On déduit de (4.5) qu'il existe un unique $u \in H^{1,0}(\Omega)$ tel que

eq:var
$$\iint_\Omega \nabla_{x,y} u(x,y) \cdot \nabla_{x,y} v(x,y)\, dxdy = \iint_\Omega \nabla_{x,y}\underline{\psi}(x,y) \cdot \nabla_{x,y} v(x,y)\, dxdy \quad \forall v \in H^{1,0}(\Omega). \tag{4.9}$$

Si $v \in C_0^\infty(\Omega)$ on en déduit

$$\exists! u \in H^{1,0}(\Omega) : \Delta_{x,y} u = -\Delta_{x,y}\underline{\psi} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

En prenant $v = u$ dans (4.9) et en utilisant le Lemme 4.4 on obtient

est:var
$$\|\nabla_{x,y} u\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + \|\nabla_x \eta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}) \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Posons

$$\phi = u + \underline{\psi}.$$

Alors $\phi$ résout le problème

dirichlet
$$\Delta_{x,y}\phi = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \quad \phi|_\Sigma = \psi. \tag{4.11}$$

**Remarque 4.6.** La solution du problème (4.11) construite par ceete procédure ne dépend pas du choix du relevement $\underline{\psi}$ choisi pourvu que celui-ci reste borné dans $H^1(\Omega)$ . En effet considérons deux solutions construites comme ci-dessus, $\phi_k = u_k + \underline{\psi}_k, k = 1, 2$. Comme $\underline{\psi}_1 - \underline{\psi}_2$ appartient à $H^1(\Omega)$ et s'annule sur le bord $\Sigma$ elle appartient également à $H^{1,0}(\Omega)$. Comme $u_k \in H^{1,0}(\Omega)$ on en déduit que $\phi = \phi_1 - \phi_2 \in H^{1,0}(\Omega)$ vérifie $\Delta_{x,y}\phi = 0$. Par unicité de la solution variationnelle on a $\phi = 0$.

Pour d'autres informations sur les solutions variationnelles on renvoie à la section 10.9.

## 4.2 L'opérateur de Dirichlet-Neumann

On définit alors formellement l'opérateur de Dirichlet-Neumann en posant

def:DN (4.12)
$$G(\eta)\psi = \sqrt{1 + |\nabla_x \eta|^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)|_\Sigma = (\partial_y \phi - \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \phi)|_\Sigma.$$

où $n$ désigne la normale unitaire extérieure à $\Sigma$.

L'objectif de la première partie de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

cont:DN **Théorème 4.7.** *Supposons $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Alors pour $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ $G(\eta)\psi$ est bien défini dans $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ et il existe une fonction $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante, indépendante de $\eta, \psi$ telle que*
$$\|G(\eta)\psi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}.$$

### 4.2.1 Préliminaires

Soit $M \in \mathbf{R}$ tel que $\eta(x) \geq M + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}^d$. Notons
$$\Omega_M = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}^d, M < y < \eta(x)\}$$
et posons pour $(x, z) \in \mathbf{R}^d \times (-1, 0)$

def:rho (4.13)
$$\rho(x, z) = (1 + z)e^{\delta z \langle D_x \rangle}\eta(x) - Mz$$

où $\delta > 0$ est une petite constante à choisir.

est:rho **Lemme 4.8.** *1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de $d$ telle que*
$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(x, z) \geq 1 - C\delta\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)}$$
$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial z}(x, z)\right| + |\nabla_x \rho(x, z)| \leq C(1 + \|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)})$$
*pour tout $(x, z) \in \mathbf{R}^d \times (-1, 0)$ .*

*2. Si $\delta\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)}$ est assez petit, l'application $(x, z) \to (x, \rho(x, z))$ est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d \times (-1, 0)$ sur $\Omega_M$.*

*Démonstration.* 1. On a

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(x,z) = \eta(x) - M + (1) + (2),$$
$$(1) = e^{\delta z\langle D_x\rangle}\eta(x) - \eta(x),$$
$$(2) = \delta(1+z)e^{\delta z\langle D_x\rangle}\langle D_x\rangle\eta(x).$$

Nous allons montrer qu'il existe une constante positive $C = C(d)$ telle que

est:1 (4.14)
$$|(1)| + |(2)| \leq C\delta \|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)}$$

ce qui impliquera 1. On commence par remarquer que

$$e^{\delta z\langle\xi\rangle} - 1 = \delta z \int_0^1 e^{\delta t z\langle\xi\rangle}\langle\xi\rangle\, dt.$$

On déduit du Corollaire 10.32 que pour $\lambda \in (-1,0)$

est:2 (4.15)
$$\|e^{\lambda\langle D_x\rangle}\langle D_x\rangle\eta(x)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} = \|\overline{\mathcal{F}}(e^{\lambda\langle\xi\rangle}) \star \langle D_x\rangle\eta\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq \|\overline{\mathcal{F}}(e^{\lambda\langle\xi\rangle})\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)}$$
$$\leq C\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)}$$

où $C$ est indépendante de $\lambda$, estimation que l'on applique avec $\lambda = \delta z$ et $\lambda = t\delta z$.

Cette même estimation prouve l'inégalité de la deuxième ligne de 1.

2. On a $\rho(x,0) = \eta(x)$ et $\rho(x,-1) = M$. D'autre part on déduit de 1. que $\frac{\partial\rho}{\partial z}(x,z) \geq \frac{1}{2}$ si $\delta$ est assez petit. D'où le résultat. □

Faisons le changement de variables

change (4.16)
$$\mathbf{R}^d \times (-1,0) \ni (x,z) \to (x, \rho(x,z)) \in \Omega_M.$$

Alors $\partial_y$ et $\nabla_x$ sont changés respectivement en

Lambdaj (4.17)
$$\Lambda_1 = \frac{1}{\partial_z\rho(x,z)}\partial_z, \quad \Lambda_2 = \nabla_x - \frac{\nabla_x\rho}{\partial_z\rho(x,z)}\partial_z$$

On garde les notations de (4.13), (4.17). Rappelons que $\widetilde{\phi}$ (l'image de la solution $\phi$ de (4.11)) vérifie l'équation $(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)\widetilde{\phi} = 0$. Celle-ci est équivalente à

eq:tilde (4.18)
$$(\partial_z^2 + \alpha\Delta_x + \beta\cdot\nabla_x\partial_z - \gamma\partial_z)\widetilde{\phi} = 0$$

où

alphabeta (4.19)
$$\alpha = \frac{(\partial_z\rho)^2}{1+|\nabla_x\rho|^2}, \quad \beta = -2\frac{\partial_z\rho\nabla_x\rho}{1+|\nabla_x\rho|^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\partial_z\rho}(\partial_z^2\rho + \alpha\Delta_x\rho + \beta\cdot\nabla_x\partial_z\rho).$$

**Remarque 4.9.** Le Laplacien étant naturellement donné sous forme divergence on voit aisément que (4.18) est equivalente à l'équation $\widetilde{P}\widetilde{\phi} = 0$ où

P:div (4.20)
$$\widetilde{P}v = \operatorname{div}_x\big(\partial_z\rho\nabla_x\widetilde{\phi}\big) - \operatorname{div}_x\big(\nabla_x\rho\,\partial_z\widetilde{\phi}\big) - \partial_z\big(\nabla_x\rho\cdot\nabla_x\widetilde{\phi}\big) + \partial_z\big(\frac{1+|\nabla_x\rho|^2}{\partial_z\rho}\partial_z\widetilde{\phi}\big).$$

Rappelons que les espaces $X^\sigma(J)$ ont été introduits dans la Définition 10.26.

Xsigma **Proposition 4.10.** *1. Soit $J=(-1,0)$, $\sigma_0>\frac{d}{2}$ et $\sigma>0$. Il existe $C>0$ telle que*

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \|fg\|_{X^\sigma(J)} \le C\big(\|f\|_{L^\infty(J,H^{\sigma_0})}\|g\|_{X^\sigma(J)} + \|g\|_{L^\infty(J,H^{\sigma_0})}\|f\|_{X^\sigma(J)}\big)\\
&(ii) \quad \|fg\|_{X^\sigma(J)} \le C\big(\|f\|_{L^\infty(J,H^{\sigma_0})}\|g\|_{X^\sigma(J)} + \|g\|_{L^\infty(J,H^{\sigma_0-\frac12})}\|f\|_{X^{\sigma+\frac12}(J)}\big)
\end{aligned}$$

*En particulier $X^\sigma(J)$ est une algèbre pour $\sigma>\frac{d}{2}$.*

*2. Soit Soit $\sigma_0>\frac{d}{2}$, $\sigma>0$ et $F:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ une fonction $C^\infty$ telle que $F(0)=0$. Il existe alors $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ telle que*

$$\|F(f)\|_{X^\sigma(J)} \le \mathcal{F}(\|f\|_{L^\infty(J,H^{s_0})})\|f\|_{X^\sigma(J)}$$

*3. Soit $m\in\mathbf{R}$, $p=p(\xi)\in S^m_{1,0}(\mathbf{R}^d)$ et $\lambda>0$. Il existe $C>0$ telle que*

$$\|e^{\lambda z\langle D_x\rangle}p(D_x)u\|_{X^\sigma(J)} \le C\|u\|_{H^{\sigma+m}(\mathbf{R}^d)}.$$

*Démonstration.* 1. Cela résulte de l'inégalité suivante appliquée avec $s=\sigma$ et $s=\sigma+\frac12$.

$$\|uv\|_{H^s} \le C(\|u\|_{H^{\sigma_0}}\|v\|_{H^s} + \|v\|_{H^{\sigma_0}}\|u\|_{H^s}).$$

2. Cela résulte de l'inégalité (10.12) appliquée avec $s=\sigma$ et $s=\sigma+\frac12$.

3. Pour l'estimation $L^\infty(J,H^\sigma)$ on utilise le fait que $e^{\lambda z\langle\xi\rangle}\le 1$ et pour l'estimation $L^2(J,H^{\sigma+\frac12})$ on utilise le gain d'une demi dérivée du noyau de Poisson (cf. (4.6)). □

Voici des estimations sur les coefficients $\alpha,\beta,\gamma$.

est:alpha **Lemme 4.11.** *Cas 1. Soit $s_0>1+\frac{d}{2}$. Il existe $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ croissante telle que*

$$\|\alpha-M^2\|_{X^{s_0-\frac12}(J)} + \|\beta\|_{X^{s_0-\frac12}(J)} + \|\gamma\|_{X^{s_0-\frac32}(J)} \le \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}\big).$$

*Cas 2. Soit $s_0>1+\frac{d}{2}$. Pour tout $s\ge s_0$ il existe $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ croissante telle que*

$$\|\alpha-M^2\|_{X^{s-\frac12}(J)} + \|\beta\|_{X^{s-\frac12}(J)} + \|\gamma\|_{X^{s-\frac32}(J)} \le \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}\big)\|\eta\|_{H^{s+\frac12}}.$$

Ici aussi on voit que dans le deuxième cas, le membre de droite est linéaire par rapport aux grandes normes d'ordre $s$.

*Démonstration.* Les estimations de $\alpha$ et $\beta$ sont très similaires, on ne traite donc que le premier coefficient. Rappelons que $\alpha=\frac{(\partial_z\rho)^2}{1+|\nabla_x\rho|^2}$ et $\rho(x,z)=(1+z)e^{\delta z\langle D_x\rangle}\eta-Mz$. Par conséquent on peut écrire

expr:rho
$$\begin{aligned}
\partial_z\rho &= -M + e^{\delta z\langle D_x\rangle}\eta + \delta(1+z)e^{\delta z\langle D_x\rangle}\langle D_x\rangle\eta\\
&:= -M + Q(z,D_x)\eta.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

Par conséquent on a

expr:rho2
$$(\partial_z\rho)^2 = M^2 - 2MQ(z,D_x)\eta + (Q(z,D_x)\eta)^2 := M^2 + R(z,\eta), \tag{4.22}$$

D'aute part on peut écrire

$$\alpha = (\partial_z\rho)^2 - (\partial_z\rho)^2\frac{|\nabla_x\rho|^2}{1+|\nabla_x\rho|^2},$$

et donc

alphaprec
$$\alpha - M^2 = R(z,\eta) - M^2\frac{|\nabla_x\rho|^2}{1+|\nabla_x\rho|^2} - R(z,\eta)\frac{|\nabla_x\rho|^2}{1+|\nabla_x\rho|^2} := A_1 + A_2 + A_3. \tag{4.23}$$

Cas 1. Pour estimer $A_1$ on utilise le fait que $X^{s_0-\frac{1}{2}}(J)$ est une algèbre puis le 3. de la Proposition 4.10 avec $m = 1, \sigma = s_0 - \frac{1}{2}$. Pour estimer $A_2$ on utilise le 2. la Proposition 4.10 avec $F(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, le fait que $L^\infty(J, H^{s_0})$ et $X^{s_0-\frac{1}{2}}$ sont des algèbres et le 3. du Lemme 4.10 pour estimer $\nabla_x\rho$. Enfin $A_3$ s'estime comme $A_1$ et $A_2$ en utilisant le fait que $X^{s_0-\frac{1}{2}}$ est une algèbre.

Cas 2. L'estimation de $A_1$ utilise le 1. de la Proposition 4.10 avec $\sigma = s - \frac{1}{2}, \sigma_0 = s_0 - \frac{1}{2}$. puis le 3. L'estimation de $A_2$ utilise le 2. de cette même Proposition. Enfin $A_3$ s'estime à partir de $A_1$ et $A_2$.

Il reste à estimer $\gamma$. D'après (4.8) on a

1surdzrho
$$\frac{1}{\partial_z\rho} + \frac{1}{M} = F(U), \quad F(U) = \frac{U}{M(-M+U)}, \quad U = Q(z,D_x)\eta. \tag{4.24}$$

Comme $F(0) = 0$ on peut appliquer la Proposition 4.10 avec $\sigma = s - \frac{1}{2}$ et en déduire que

$$\|F(U)\|_{X^{s-\frac{1}{2}}(J)} \leq \mathcal{F}(\|U\|_{L^\infty(J,H^{s_0-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)})\|U\|_{X^{s-\frac{1}{2}}(J)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}.$$

On écrit ensuite

$$\gamma = (\frac{1}{\partial_z\rho} + \frac{1}{M})(\partial_z^2\rho + \alpha\Delta_x\rho + \beta\cdot\nabla_x\partial_z\rho) - \frac{1}{M}(\partial_z^2\rho + \alpha\Delta_x + \beta\cdot\nabla_x\partial_z\rho)$$

et on utilise le Théorème 10.24 successivement avec $\sigma = s - \frac{3}{2}, \sigma_1 = s - \frac{1}{2}, \sigma_2 = s - \frac{3}{2}$ puis $\sigma = s - 1, \sigma_1 = s - \frac{1}{2}, \sigma_2 = s - 1$ ainsi que les estimations du Lemme 4.11 cas 2. pour conclure. □

*Démonstration du Théorème 4.7.* Si on note $\widetilde{\phi}(x,z) = \phi(x,\rho(x,z))$ on déduit de (4.12) que

def:DN2
$$G(\eta)\psi(x) = \big(\Lambda_1\widetilde{\phi} - \nabla_x\rho\cdot\Lambda_2\widetilde{\phi}\big)|_{z=0}. \tag{4.25}$$

On a alors le résultat suivant.

est:U
**Lemme 4.12.** *Posons $J = (-1,0)$ et $U = \Lambda_1\widetilde{\phi} - \nabla_x\rho\cdot\Lambda_2\widetilde{\phi}$. Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ telle que*

$$\|U\|_{L^2(J,L^2(\mathbf{R}^d))} + \|\partial_z U\|_{L^2(J,H^{-1}(\mathbf{R}^d))} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}.$$

*Démonstration.* On a $U = U_1 + U_2$ où $U_1 = \Lambda_1 \widetilde{u} - \nabla_x \rho \cdot \Lambda_2 \widetilde{u}$ et $U_2 = \Lambda_1 \underline{\widetilde{\psi}} - \nabla_x \rho \cdot \Lambda_2 \underline{\widetilde{\psi}}$

L'estimation sur $U_1$ résulte immédiatement de (4.10) restreint à $\Omega_M$ et du changement de variables (4.16). L'estimation sur $U_2$ est une conséquence de (4.6), (4.7) et des estimations sur $\rho$ données par le Lemme 4.8.

Pour estimer $\partial_z U$ on remarque que, puisque $\Delta_{x,y}\phi = 0$, on a $(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)\widetilde{\phi} = 0$. Ensuite on ecrit

dzU

$$\begin{aligned} \partial_z U &= \partial_z \Lambda_1 \widetilde{\phi} - \nabla_x \partial_z \rho \cdot \Lambda_2 \widetilde{\phi} - \nabla_x \rho \cdot \partial_z \Lambda_2 \widetilde{\phi} \\ &= (\partial_z \rho)\Lambda_1^2 \widetilde{\phi} - \nabla_x \partial_z \rho \cdot \Lambda_2 \widetilde{\phi} - (\partial_z \rho)(\nabla_x - \Lambda_2)\Lambda_2 \widetilde{\phi} \\ &= (\partial_z \rho)(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)\widetilde{\phi} - \nabla_x((\partial_z \rho)\Lambda_2 \widetilde{\phi}) \\ &= -\nabla_x((\partial_z \rho)\Lambda_2 \widetilde{\phi}). \end{aligned} \tag{4.26}$$

(Remarquons que le calcul ci-dessus a bien un sens. En effet à $z$ fixé l'opérateur $e^{\delta z \langle D_x \rangle}$ est infiniment régularisant, de sorte qu'en fait $\partial_z \rho$ est dans $W^{\infty,\infty}(\mathbf{R}^d)$).

On déduit de (4.26) que

$$\begin{aligned} \|\partial_z U\|_{L^2(J,H^{-1}(\mathbf{R}^d))} &\leq \|(\partial_z \rho)\Lambda_2 \widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2(\mathbf{R}^d))} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)}) \|\Lambda_2 \widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2(\mathbf{R}^d))} \\ &\leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)}) \|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)} \end{aligned}$$

d'après (4.10) □

Pour conclure la preuve du Théorème 4.7 on utilise le Lemme 10.24. En effet d'après les Lemmes 4.12 et 10.24 (avec $s = -\frac{1}{2}$) on a $G(\eta)\psi(x) = U(0,\cdot) \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ ainsi que l'estimation du Théorème 4.7, ce qui termine la preuve de ce résultat. □

## 4.3 Estimations d'ordre supérieur

Ayant donné un sens à l'opérateur de Dirichlet-Neumann dans $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ nous allons maintenant étudier son action sur les espaces de Sobolev d'ordre supérieur. Voici les énoncés des principaux résultats de ce paragraphe.

DNsup

**Théorème 4.13.** *Soit $d \geq 1$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$.*

*Cas 1. Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq s_0 - 1$, pour tout $\eta \in H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ et tout $\psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|G(\eta)\psi\|_{H^\sigma} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}) \|\psi\|_{H^{\sigma+1}}.$$

*Cas 2. Pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $\eta \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$, tout $s_0 - 1 \leq \sigma \leq s - \frac{1}{2}$ et tout $\psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|G(\eta)\psi\|_{H^\sigma} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}} \times H^{s_0}}) \big(\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} + \|\psi\|_{H^{\sigma+1}}\big).$$

Ce qu'il faut remarquer dans le cas 2. du théorème ci-dessus c'est que l'estimation est linéaire par rapport au grandes normes d'ordre $s$ et non linéaire seulement par rapport à des normes fixes d'ordre ne dépendant que de la dimension. On parle alors d'estimations "douces".

Posons ensuite

reste

$$R(\eta)\psi = G(\eta)\psi - T_\lambda \psi \tag{4.27}$$

où

lambda=

$$\lambda(x,\xi) = \big\{(1+|\nabla_x\eta(x)|^2|\xi|^2 - (\nabla_x\eta(x)\cdot\xi)^2\big\}^{\frac12}. \tag{4.28}$$

Le résultat suivant montre que l'on peut écrire l'opérateur de Dirichlet-Neumann comme un opérateur paradifférentiel plus un reste qui est meilleur.

est:reste

**Théorème 4.14.** *Soit $d \geq 1$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$.*

*Cas 1. Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour $0 \leq t \leq s_0 - \frac12$ pour tout $\eta \in H^{s_0+\frac12}(\mathbf{R}^d)$ et tout $\psi \in H^{t+\frac12}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|R(\eta)\psi\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\|\psi\|_{H^{t+\frac12}}.$$

*Cas 2. Pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $\eta \in H^{s+\frac12}(\mathbf{R}^d)$, tout $s_0 - \frac12 \leq t \leq s - \frac12$ et tout $\psi \in H^{t+\frac12}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|R(\eta)\psi\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}})\big(\|\eta\|_{H^{s+\frac12}} + \|\psi\|_{H^{t+\frac12}} + 1\big).$$

Le reste de ce paragraphe sera consacré à la démonstration de ces résultats. Voici un corollaire des estimations variationnelles.

**Proposition 4.15.** *Soit $J = (-1,0)$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

est:var2

$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{X^{-\frac12}(J)} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}(\mathbf{R}^d)}\big)\|\psi\|_{H^{\frac12}(\mathbf{R}^d)}. \tag{4.29}$$

*Démonstration.* Rappelons que $\widetilde{\phi} = \widetilde{u} + \underline{\widetilde{\psi}}$ où $\underline{\widetilde{\psi}} = \chi(z)e^{z\langle D_x\rangle}\psi$ et que $X^{-\frac12} = L^\infty(J, H^{-\frac12}(\mathbf{R}^d)) \cap L^2(J, L^2(\mathbf{R}^d))$.

Etape 1: estimation dans $L^2(J, L^2(\mathbf{R}^d))$. On a

$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2)} \leq \|\nabla_{x,z}\widetilde{u}\|_{L^2(J,L^2)} + \|\nabla_{x,z}\underline{\widetilde{\psi}}\|_{L^2(J,L^2)}$$

Le membre de droite s'estime par le second membre de (4.29); le premier terme en utilisant (4.10) et le fait que $\partial_z = (\partial_z\rho)\Lambda_1, \nabla_x = \Lambda_2 + (\nabla_x\rho)\Lambda_1$, le second terme en utilisant le Lemme 4.5 avec $s = 0, k = 1$. On a aussi utilisé l'inégalité $\|\eta\|_{W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)} \leq C\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}(\mathbf{R}^d)}$.

Etape 2: estimation dans $L^\infty(J, H^{-\frac12}(\mathbf{R}^d))$. On utilise le Lemme (10.24) qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}\|\nabla_x\widetilde{\phi}\|_{L^\infty(J,H^{-\frac12})} &\leq C(\|\nabla_x\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2)} + \|\partial_z\nabla_x\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})}) \leq C'\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2)}\\ &\leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac12}(\mathbf{R}^d)}\end{aligned}$$

d'après la première étape. De même on peut écrire

1 (4.30) $$\|\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^\infty(J,H^{-\frac{1}{2}})} \leq C(\|\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2)} + \|\partial_z^2\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})}).$$

utilisant la première étape on obtient

2 (4.31) $$\|\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, d'après (4.18) on peut écrire

$$\|\partial_z^2\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})} \leq \|\alpha\Delta_x\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})} + \|\beta\cdot\nabla_x\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})} + \|\gamma\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})} = A_1 + A_2 + A_3.$$

Pour estimer $A_1$ et $A_2$ on utilise le Théorème 10.10 (où l'on note $\sigma_j$ les parametres) avec $\sigma_0 = -1, \sigma_1 = s_0 - \frac{1}{2}, \sigma_2 = -1$. On a bien $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$, $\sigma_0 \leq \sigma_j, j = 1, 2$ et $\sigma_0 < \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{d}{2}$. On obtient

$$A_1 \leq \big(\|\alpha - M^2\|_{L^\infty(J,H^{s_0-\frac{1}{2}})} + M^2\big)\|\Delta_x\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})},$$
$$A_2 \leq \|\beta\|_{L^\infty(J,H^{s_0-\frac{1}{2}})}\|\nabla_x\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})}$$

En utilisant l'étape 1 ainsi que le Lemme 4.11 on obtient

3 (4.32) $$A_1 + A_2 \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}$$

Pour estimer $A_3$ on utilise encore la Proposition 10.10 avec $\sigma_0 = -\frac{3}{2}, \sigma_1 = s_0 - \frac{3}{2}, \sigma_2 = 0$ qui vérifient toutes les conditions. Il vient

$$A_3 \leq \|\gamma\|_{L^\infty(J,H^{s_0-\frac{3}{2}})}\|\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,L^2)}.$$

Comme ci-dessus on obtient

4 (4.33) $$A_3 \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}.$$

En utilisant (4.32) et (4.33), on obtient

5 (4.34) $$\|\partial_z^2\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{-1})} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}$$

et d'après (4.30), (4.31),

$$\|\partial_z\widetilde{\phi}\|_{L^\infty(J,H^{-\frac{1}{2}})} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)})\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}$$

ce qui termine la preuve de (4.29). □

### 4.3.1 Regularité d'ordre supérieur

L'objet de ce paragraphe est de démontrer les résultats suivants.

higher **Théorème 4.16.** *Soit $d \geq 1$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$.*

*Cas 1. Pour tout $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq s_0 - 1$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $\eta \in H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ et tout $\psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|G(\eta)\psi\|_{H^\sigma} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\big)\|\psi\|_{H^{\sigma+1}}.$$

*Cas 2. Pour tout $s \geq s_0$ et tout $s_0 - 1 \leq \sigma \leq s - \frac{1}{2}$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $\eta \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ et tout $\psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|G(\eta)\psi\|_{H^\sigma} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0}}\big)\big(\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} + \|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + 1\big).$$

Comme précedemment on pose

reste
$$R(\eta)\psi := G(\eta)\psi - T_\lambda\psi \tag{4.35}$$

où

$$\lambda = \big((1 + |\nabla_x\eta|^2)|\xi|^2 - (\nabla_x\eta \cdot \xi)^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

higher:reste **Théorème 4.17.** *Soit $d \geq 1$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$.*

*Cas 1. Pour tout $-\frac{1}{2} \leq t \leq s_0 - \frac{1}{2}$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $\eta \in H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ et tout $\psi \in H^{t+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|R(\eta)\psi\|_{H^t} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\big)\|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}}.$$

*Cas 2. Pour tout $s \geq s_0$ et tout $s_0 - \frac{1}{2} \leq t \leq s - \frac{1}{2}$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $\eta \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ et tout $\psi \in H^{t+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ on a*

$$\|R(\eta)\psi\|_{H^t} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0}}\big)\big(\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} + \|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}} + 1\big).$$

Ce dernier résultat montre que l'opérateur de Dirichlet Neumann peut s'écrire comme un opérateur paradifférentiel du premier ordre, modulo un reste d'ordre $\frac{1}{2}$ et que, lui et le reste de paralinéarisation, vérifient des estimations "douces" au sens défini précedemment.

Le coeur de la preuve réside dans le résultat suivant de régularité elliptique.

reg:ell **Théorème 4.18.** *Soit $d \geq 1, J = (-1, 0)$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Soit $\widetilde{v}$ une solution du problème*

equ:ell
$$\begin{cases} (\partial_z^2 + \alpha\Delta_x + \beta \cdot \nabla_x\partial_z - \gamma\partial_z)\widetilde{v} = F \quad \text{dans } \mathbf{R}^d \times J, \\ \widetilde{v}|_{z=0} = \psi. \end{cases} \tag{4.36}$$

*Cas 1: pour $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq s_0 - 1$ soit $\eta \in H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d), \psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d), F \in Y^\sigma(J)$ et supposons que*

rec0
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac{1}{2}}(J)} < +\infty. \tag{4.37}$$

*Alors pour $z_0 \in ]-1,0[$ on a $\nabla_{x,z}\widetilde{v} \in X^\sigma(z_0,0)$ et il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante ne dépendant que de $s_0$ et $d$ telle que*

$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(z_0,0)} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\big)\big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(J)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac{1}{2}}(J)}\big\}.$$

*Cas 2: pour $s \geq s_0$ et $s_0 - 1 \leq \sigma \leq s - \frac{1}{2}$ soit $\eta \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d), \psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d), F \in Y^\sigma(J)$ et supposons que*

rec'0

$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{s_0-1}(J)} < +\infty. \tag{4.38}$$

*Alors pour $z_0 \in ]-1,0[$ on a $\nabla_{x,z}\widetilde{v} \in X^\sigma(z_0,0)$ et il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante ne dépendant que de $s_0, s$ et $d$ telle que*

$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(z_0,0)} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0}}\big)\big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(J)} + (\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}+1)\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{s_0-1}(J)}\big\}.$$

continuite1

**Remarque 4.19.** Pour $J = (z_0, 0)$ on introduit l'espace

Xc

$$X_c^\sigma(J) = C^0([z_0,0], H^\sigma(\mathbf{R}^d)) \cap L^2(J, H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)). \tag{4.39}$$

Supposons pour simplifier $F \in L^2(J, H^{\sigma-\frac{1}{2}})$. Alors le théorème ci-dessus est vrai en remplaçant l'espace $X^\sigma$ par $X_c^\sigma$. En effet d'après le Lemme 10.24 il suffit de montrer que $\nabla_{x,z}\widetilde{v} \in L^2(J, H^{\sigma+\frac{1}{2}})$ et $\partial_z^2\widetilde{v} \in L^2(J, H^{\sigma-\frac{1}{2}})$ avec les estimations correspondantes. La première information est contenue dans le fait que $\nabla_{x,z}\widetilde{v} \in X^\sigma(J)$. Pour la deuxième on utilise l'équation (4.36). Il vient

$$\|\partial_z^2\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})} \leq \|F\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})} + \|\alpha\Delta_x\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})} + \|\beta\cdot\nabla_x\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})} + \|\gamma\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})}.$$

En utilisant le Théorème 10.10 avec $s_0 = \sigma - \frac{1}{2}, s_1 = s - \frac{1}{2}, s_2 = \sigma - \frac{1}{2}$ et le Lemme 4.11 on obtient

$$\begin{aligned}\|\alpha\Delta_x\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})} &\leq C(\|\alpha - M^2\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{1}{2}})}\|\Delta_x\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})} + M^2\|\Delta_x\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})})\\ &\leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\big)\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{X^\sigma(J)} + CM^2\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{X^\sigma(J)}.\end{aligned}$$

Le terme $\|\beta\cdot\nabla_x\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})}$ s'estime exactement de la même façon. Enfin en utilisant le Théorème 10.10 avec $s_0 = \sigma - \frac{1}{2}, s_1 = s - 1, s_2 = \sigma$ il vient

$$\begin{aligned}\|\gamma\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})} &\leq C\|\gamma\|_{L^2(J,H^{s-1})}\|\partial_z\widetilde{v}\|_{L^\infty(J,H^\sigma)} \leq C\|\gamma\|_{X^{s-\frac{3}{2}}(J)}\|\partial_z\widetilde{v}\|_{X^\sigma(J)}\\ &\leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\big)\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}\|\partial_z\widetilde{v}\|_{X^\sigma(J)}\end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.11. Il suffit alors d'appliquer le Théorème 4.18 pour conclure.

Dans ce qui suit $\phi$ désignera la solution du problème (4.11) et $\widetilde{\phi}(x,z) = \phi(x,\rho(x,z))$.

coro1

**Corollaire 4.20.** *Soit $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$.*

*Cas 1: pour $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq s_0 - 1$ soit $\eta \in H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d), \psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d)$. Alors pour $z_0 \in ]-1, 0[$ on a $\nabla_{x,z}\widetilde{\phi} \in X^\sigma(z_0, 0)$ et il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante ne dépendant que de $s_0$ et $d$ telle que*

est:cas1 (4.40)
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{X^\sigma(z_0,0)} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\big)\|\psi\|_{H^{\sigma+1}}.$$

*Cas 2: pour $s \geq s_0$ et $s_0 - 1 \leq \sigma \leq s - \frac{1}{2}$ soit $\eta \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d), \psi \in H^{\sigma+1}(\mathbf{R}^d)$ Alors pour $z_0 \in ]-1, 0[$ on a $\nabla_{x,z}\widetilde{\phi} \in X^\sigma(z_0, 0)$ et il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante ne dépendant que de $s_0, s$ et $d$ telle que*

est:cas2 (4.41)
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{X^\sigma(z_0,0)} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0}}\big)\big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} + 1\big\}.$$

continuite2 **Remarque 4.21.** Comme dans la Remarque 4.19 on a $\nabla_{x,z}\widetilde{\phi} \in X^\sigma_c(z_0, 0)$.

*Démonstration du Corollaire.* D'après (4.18) $\widetilde{\phi}$ satisfait (4.36) avec $F = 0$ et on a prouvé dans (4.29) que
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{X^{-\frac{1}{2}}(J)} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}\big)\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}.$$
On applique alors le Théorème 4.18 à $\widetilde{\phi}$. □

*Démonstration du Théorème 4.16 à partir du Corollaire 4.20.* Posons $U = \Lambda_1\widetilde{\phi} - (\nabla_x\rho)\Lambda_2\widetilde{\phi}$. D'après (4.25) et (4.26) on a $U|_{z=0} = G(\eta)\psi$ et
$$\partial_z U = -\nabla_x\big((\partial_z\rho)\Lambda_2\widetilde{\phi}\big).$$
Utilisant le Lemme 10.24 avec $f = U$ on obtient
$$\begin{aligned}\|G(\eta)\psi\|_{H^\sigma} &\leq C\big(\|U\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac{1}{2}})} + \|\partial_z U\|_{L^2(J,H^{\sigma-\frac{1}{2}})}\big)\\ &\leq C'\big(\|\Lambda_1\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac{1}{2}})} + \|(\nabla_{x,z}\rho)\Lambda_2\widetilde{\phi}\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac{1}{2}})}\big).\end{aligned}$$
Cas 1: si $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq s_0 - 1$ on utilise l'estimation (4.40), les estimations sur $\rho$ ainsi que
$$\|fg\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac{1}{2}})} \leq C\|f\|_{L^\infty(J,H^{s_0-\frac{1}{2}})}\|g\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac{1}{2}})}$$
qui découle de Théorème 10.10 avec $\sigma_0 = \sigma + \frac{1}{2}, \sigma_1 = s_0 - \frac{1}{2}, \sigma_2 = \sigma + \frac{1}{2}$.

Cas 2: si $s_0 - 1 \leq \sigma \leq s - \frac{1}{2}$ on utilise (4.41), les estimations sur $\rho$ ainsi que
$$\|fg\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac{1}{2}})} \leq C(\|f\|_{L^2(J,H^{s_0-1})}\|g\|_{X^\sigma(J)} + \|g\|_{L^2(J,H^{s_0-1})}\|f\|_{X^\sigma(J)})$$
que l'on a prouvé dans la Proposition 4.10. □

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 4.18, dont on garde les notations, par recurrence sur $\sigma$. Soit $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. On introduit les deux hypothèses suivantes.

Cas 1: pour $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq s_0 - 1$ et $-1 < z_0 < z_1 < 0$
$$(\mathcal{H}_\sigma) \quad \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(z_1,0)} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\big)\big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(J)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac{1}{2}}(z_0,0)}\big\}.$$

Cas 2: pour $s \geq s_0, s_0 - 1\|eq\sigma \leq s - \frac{1}{2}$ et $-1 < z_0 < z_1 < 0$

$$(\mathcal{K}_\sigma) \quad \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(z_1,0)} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0}}\big)\big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(J)} + \\ + (\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} + 1)\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{s_0-1}(z_0,0)}\big\}.$$

Remarquons que $(\mathcal{H}_{-\frac{1}{2}})$ et $(\mathcal{K}_{s_0-1})$ sont trivialement satisfaites.

rec2 **Proposition 4.22.** *Cas 1: si $(\mathcal{H}_\sigma)$ est vraie pour un $\sigma \in [-\frac{1}{2}, s_0 - 1]$ alors $(\mathcal{H}_{\sigma+\frac{1}{2}})$ est vraie tant que $\sigma + \frac{1}{2} \leq s_0 - 1$.*

*Cas 2: pour $s \geq s_0$ si $(\mathcal{K}_\sigma)$ est vraie pour un $\sigma \in [s_0 - 1, s - \frac{1}{2}]$ alors $(\mathcal{K}_{\sigma+\frac{1}{2}})$ est vraie tant que $\sigma + \frac{1}{2} \leq s - \frac{1}{2}$.*

La preuve de cette Proposition nécessitera quelques résultats intermédiaires.

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}), \chi(z) = 0$ si $z \leq z_0, \chi(z) = 1$ si $z \geq z_1$. On pose

wtilde
$$\widetilde{w} = \chi(z)\widetilde{v}. \tag{4.42}$$

Alors $\widetilde{w}$ vérifie

eq:wtilde
$$\begin{cases} (\partial_z^2 + \alpha\Delta_x + \beta\cdot\nabla_x\partial_z\widetilde{v})\widetilde{w} = \chi F + F_1 \quad \text{dans } \mathbf{R}^d \times J, \\ F_1 = (\partial_z^2\chi)\widetilde{v} + 2(\partial_z\chi)\partial_z\widetilde{v} + (\partial_z\chi)\beta\cdot\nabla_x\widetilde{v} + \gamma\chi\partial_z\widetilde{v}, \\ \widetilde{w}|_{z=0} = \psi, \quad \widetilde{w}|_{z\leq z_0} = 0. \end{cases} \tag{4.43}$$

On commence par estimer $F_1$.

F1 **Lemme 4.23.** *Cas 1: pour $-\frac{1}{2} \leq \sigma \leq s_0 - 1$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

$$\|F_1\|_{Y^{\sigma+\frac{1}{2}}} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\big(\|\psi\|_{H^\sigma} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(z_0,0)}\big).$$

*Cas 2: pour $s \geq s_0$ et $s_0 - 1 \leq \sigma \leq s - \frac{1}{2}$ tel que $\sigma + \frac{1}{2} < s - \frac{1}{2}$ il existe $\leq F : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

$$\|F_1\|_{Y^{\sigma+\frac{1}{2}}} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(z_0,0)} + (1 + \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}})\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{s_0-1}(z_0,0)}\big\}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'estimer les premier, troisième et quatrième termes de $F_1$. Rappelons (cf. (10.26)) que $Y^{\sigma+\frac{1}{2}}(J) = L^1(J, H^{\sigma+\frac{1}{2}}) + L^2(J, H^\sigma)$.

Cas 1: pour le troisième terme on utilise le Théorème 10.10 avec $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1 = s_0 - \frac{1}{2}, \sigma_2 = \sigma$ qui vérifie les conditions puisque $\sigma_1 + \sigma_2 \geq -\frac{1}{2} + s_0 - 1 > \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \geq 0$. On obtient

$$\begin{aligned} \|(\partial_z\chi)\beta\cdot\nabla_x\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^\sigma)} &\leq \|\beta\|_{L^2((z_0,0),H^{s_0-1})}\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{L^\infty((z_0,0),H^\sigma)} \\ &\leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{L^\infty((z_0,0),H^\sigma)} \end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.11. Pour le premier on écrit

$$|\partial_z^2\chi|\|\widetilde{v}(\cdot,z)\|_{H^\sigma} \leq |\partial_z^2\chi|\|\psi\|_{H^\sigma} + |\partial_z^2\chi|\Big(\int_{z_0}^0 \|\partial_z\widetilde{v}(\cdot,t)\|_{H^\sigma}^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

d'où

est:vtilde (4.44)
$$\begin{aligned}\|(\partial_z^2\chi)\widetilde{v}\|_{L^\infty((z_0,0),H^\sigma)} &\leq C\big(\|\psi\|_{H^\sigma}+\|\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2((z_0,0),H^\sigma)}\big)\\ \|(\partial_z^2\chi)\widetilde{v}\|_{L^2((z_0,0),H^{\sigma+\frac12})} &\leq C\big(\|\psi\|_{H^{\sigma+\frac12}}+\|\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2((z_0,0),H^{\sigma+\frac12})}\big).\end{aligned} \tag{4.44}$$

Enfin pour le quatrième terme on écrit

$$\|\chi\gamma\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^\sigma)} \leq C\|\gamma\|_{L^2(J,H^{s_0-1})}\|\chi\partial_z\widetilde{v}\|_{L^\infty(J,H^\sigma)} \leq C'\|\gamma\|_{X^{s_0-\frac32}}\|\partial_z\widetilde{v}\|_{X^\sigma(z_0,0)} \tag{4.45}$$

et on utilise le Lemme 4.11.

Cas 2: On utilise l'inégalité $(i)$ de la Proposition 4.10 avec $\sigma_0 = s_0-1$ et $\sigma-\frac12>0$ à la place de $\sigma$. Il vient

$$\|(\partial_z\chi)\beta\cdot\nabla_x\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^\sigma)} \leq C\big(\|\beta\|_{X^{\sigma-\frac12}(J)}\|(\partial_z\chi)\cdot\nabla_x\widetilde{v}\|_{X^{s_0-1}(J)}+\|\beta\|_{X^{s_0-1}(J)}\|(\partial_z\chi)\cdot\nabla_x\widetilde{v}\|_{X^{\sigma-\frac12}(J)}\big).$$

Il suffit d'utiliser le Lemme 4.11 pour conclure. De même d'après l'inégalité $(ii)$ de la Proposition 4.10 avec $\sigma_0 = s_0-1$ et $\sigma-\frac12$ à la place de $\sigma$ on peut écrire

$$\|\chi\gamma\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^\sigma)} \leq C(\|\gamma\|_{X^{\sigma-\frac12}(J)}\|\chi\partial_z\widetilde{v}\|_{X^{s_0-1}(J)}+\|\gamma\|_{X^{s_0-\frac32}(J)}\|\chi\partial_z\widetilde{v}\|_{X^\sigma(J)}).$$

Ensuite on remarque que $\sigma-\frac12 \leq s-\frac32$. On utilise alors le Lemme 4.11 pour conclure. □

L'étape suivante consiste à remplacer la multiplication par $\alpha,\beta$ par la paramultiplication $T_\alpha, T_\beta$.

eq:para **Proposition 4.24.** *Soit $J=(-1,0), s_0>1+\frac{d}{2}$. Il existe $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $I\subset\subset J$ $\widetilde{w}$ satisfait l'équation paradifférentielle*

Leq:para (4.46)
$$(\partial_z^2+T_\alpha\Delta_x+T_\beta\cdot\nabla_x\partial_z)\widetilde{w} = \chi F+F_1+F_2 \tag{4.46}$$

*où $F_2$ est un reste qui vérifie*

*Cas 1: pour $0\leq\sigma\leq s_0-1$ avec $\sigma+\frac12\leq s_0-1$*

$$\|F_2\|_{Y^{\sigma+\frac12}(I)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(I)} \tag{4.47}$$

*Cas 2: pour $s\geq s_0$ et $s_0-1\leq\sigma\leq s-\frac12$ avec $\sigma+\frac12\leq s-\frac12$*

$$\|F_2\|_{Y^{\sigma+\frac12}(I)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})(1+\|\eta\|_{H^{s+\frac12}})\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(I)} \tag{4.48}$$

*Démonstration.* Rappelons que nous avons des estimations sur $\alpha-M^2$. Posons $\alpha_1=\alpha-M^2$. Comme $T_1=\psi(D)u$ où $\psi(\xi)=1$ si $|\xi|\geq 1$ on a

$$(\alpha-T_\alpha)\Delta_x = (\alpha_1-T_{\alpha_1})\Delta_x+M^2\theta(D)\Delta_x$$

où $\theta\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Cas 1: d'après le Théorème 10.11 appliqué avec $\sigma_0=\sigma, \sigma_1=s_0-1, \sigma_2=\sigma-\frac{1}{2}$ il vient

$$\|(\alpha_1-T_{\alpha_1})\Delta_x\widetilde{w}\|_{L^2(I,H^\sigma)} \leq \|\alpha_1\|_{L^\infty(I,H^{s_0-\frac{1}{2}})}\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{L^2(I,H^{\sigma+\frac{1}{2}})}$$
$$\|(\beta-T_\beta)\cdot\nabla_x\partial_z\widetilde{w}\|_{L^2(I,H^\sigma)} \leq \|\beta\|_{L^\infty(I,H^{s_0-\frac{1}{2}})}\|\partial_z\widetilde{v}\|_{L^2(I,H^{\sigma+\frac{1}{2}})}$$

en on utilise les estimations du Lemme 4.11. Enfin

$$\|\theta(D)\Delta_x\widetilde{w}\|_{L^2(I,H\sigma} \leq C\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{L^2(I,H^\sigma)}.$$

Cas 2: par le Théorème 2.10 du livre de Métivier on a pour $\sigma>0$

$$\|(a-T_a)u\|_{H^\sigma} \leq C\|u\|_{C_*^{-\frac{1}{2}}}\|a\|_{H^{\sigma+\frac{1}{2}}}$$

de sorte que

$$\|(\alpha_1-T_{\alpha_1})\Delta_x\widetilde{w}\|_{L^2(I,H^\sigma)} \leq \|\alpha_1\|_{L^\infty(I,H^{\sigma+\frac{1}{2}})}\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{C_*^{\frac{1}{2}}}.$$

On conclut en remarquant que $\sigma+\frac{1}{2}\leq s-\frac{1}{2}$, $H^{s_0+\frac{1}{2}}\subset C_*^{\frac{1}{2}}$ puis en appliquant le Lemme 4.11. L'estimation sur $\beta$ est analogue. □

On effectue maintenant un découplage en deux équations paraboliques.

F3 **Proposition 4.25.** *Soit $s_0>1+\frac{d}{2}$. Il existe deux symboles $a,A\in\Gamma^1_{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d\times I), \mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ croissante et un reste $F_3$ tels que*

decouplage
$$(\partial_z-T_a)(\partial_z-T_A)\widetilde{w}=\chi F+F_1+F_2+F_3 \tag{4.49}$$

*avec*

$$\sup_{z\in I}\big(\mathcal{M}^1_{\frac{1}{2}}(a(z))+\mathcal{M}^1_{\frac{1}{2}}(A(z))\big)\leq\mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}) \tag{4.50}$$

*et*

$$\|F_3\|_{Y^{\sigma+\frac{1}{2}}}\leq\mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(I)} \tag{4.51}$$

*Démonstration.* On pose

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}\Big(-i\beta\cdot\xi-\sqrt{4\alpha|\xi|^2-(\beta\cdot\xi)^2}\Big),\\ A=\dfrac{1}{2}\Big(-i\beta\cdot\xi+\sqrt{4\alpha|\xi|^2-(\beta\cdot\xi)^2}\Big).\end{cases} \tag{4.52}$$

Alors $a,A\in\Gamma^1_{\frac{1}{2}}$ et $aA=-\alpha|\xi|^2$ et $a+A=-i\beta\cdot\xi$. D'autre part comme $s_0>1+\frac{d}{2}$ on a

$$\sup_{z\in(-1,0)}\big(\mathcal{M}^1_{\frac{1}{2}}(a(z))+\mathcal{M}^1_{\frac{1}{2}}(A(z))\big)\leq\mathcal{F}(\|\nabla_x\eta\|_{W^{\frac{1}{2},\infty}})\leq\mathcal{F}_1(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})$$

Montrons qu'il existe $c>0$ ne dépendant que de $\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}$ telle que

borneinf
$$\sqrt{4\alpha|\xi|^2-(\beta\cdot\xi)^2}\geq c|\xi|. \tag{4.53}$$

En effet il résulte aisément de (4.19) et de (4.8) que

$$4\alpha|\xi|^2 - (\beta\cdot\xi)^2 \geq 4\frac{(\partial_z\rho)^2}{(1+|\nabla_x\rho|^2)^2}|\xi|^2 \geq c|\xi|^2.$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned}(\partial_z - T_a)(\partial_z - T_A) &= \partial_z^2 - \partial_z T_A - T_a\partial_z + T_aT_A\\ &= \partial_z^2 - T_{a+A}\partial_z + T_{aA} - T_{\partial_z A} + T_aT_A - T_{aA}\\ &= \partial_z^2 - T_\beta\cdot\partial_z - T_\alpha\Delta_x + R_0 + R_1, \quad R_0 := -T_{\partial_z A}, R_1 = T_aT_A - T_{aA}.\end{aligned}$$

Comme $a, A \in \Gamma^1_{\frac12}$ le calcul symbolique paradifférentiel montre que $R_1(z)$ est d'ordre $1+1-\frac12 = \frac32$. Comme $\partial_z A(z) \in \Gamma^1_{-\frac12}$, $R_0(z)$ est d'ordre $1+\frac12 = \frac32$ et l'on a l'estimation

est:Rj
$$\sum_{j=0}^{1}\sup_{z\in(-1,0)}\|R_j(z)\|_{H^{t+\frac32}\to H^t} \leq \mathcal{F}\big(\sup_{z\in(-1,0)}\big(\mathcal{M}^1_{\frac12}(a(z)) + \mathcal{M}^1_{\frac12}(A(z))\big) \leq \mathcal{F}_1(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}). \tag{4.54}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\|F_3\|_{L^2(J,H^\sigma)} &\leq \sum_{j=0}^{1}\|R_j(z)\widetilde{w}\|_{L^2(J,H^\sigma)} \leq \mathcal{F}_1(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\|\widetilde{w}\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac32})}\\ &\leq \mathcal{F}_1(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\|\nabla_x\widetilde{v}\|_{L^2(J,H^{\sigma+\frac12})}.\end{aligned}$$

car les symboles des opérateurs $R_j$ sont nuls près de zéro. $\square$

*Démonstration de la Proposition 4.22.* Supposons que $(\mathcal{H}_\sigma)$ soit satisfaite; cela veut dire qu'il existe $I_0 = (z_0, 0)$ tel que

rec3
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^\sigma(I_0)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\Big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(I_0)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac12}(J)}\Big\}. \tag{4.55}$$

On veut montrer qu'il existe $I_1 = (z_1, 0)$ tel que

rec4
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{\sigma+\frac12}(I_1)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\Big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+\frac32}} + \|F\|_{Y^{\sigma+\frac12}(I_1)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac12}(J)}\Big\}. \tag{4.56}$$

Soit $z_0 < z_1 < 0$ et $\theta \in C^\infty(\mathbf{R})$ telle que $\theta(z_0) = 0, \theta(z) = 1$ pour $z \geq z_1$; posons

wsous
$$\underline{w} = \theta(z)(\partial_z - T_A)\widetilde{w}. \tag{4.57}$$

Il résulte de la Proposition 4.49 que pour $z \geq z_0$ on a

eq:wsous
$$\partial_z\underline{w} - T_a\underline{w} = \theta(z)\big(\chi F + \sum_{j=1}^{3}F_j + F_4\big), \qquad F_4 = \theta'(z)(\partial_z - T_A)\widetilde{w}. \tag{4.58}$$

D'après le Lemme 4.23, les Propositions 4.24, 4.25 et (4.55) on a

est:thetaFj
$$\sum_{j=1}^{3}\|\theta F_j\|_{Y^{\sigma+\frac12}(I_0)} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\Big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(I_0)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac12}(J)}\Big\}. \tag{4.59}$$

Ensuite on voit facilement, en utilisant (4.55) que

F4 (4.60)
$$\|F_4\|_{Y^{\sigma+\frac12}(I_0)} \leq \|F_4\|_{L^2(I_0,H^\sigma)} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}\big)\Big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(I_0)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac12}(J)}\Big\}.$$

Comme $\mathrm{Re}(-a) \geq c|\xi|$ on peut appliquer le Lemme 10.27 sur l'intervalle $I_0 = (z_0, 0)$ à l'opérateur $\partial_z + T_{-a}$; comme $\underline{w}|_{z=z_0} = 0$ il vient

est:wsous
$$\|\underline{w}\|_{X^{\sigma+\frac12}(I_0)} \leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}\big)\Big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+1}} + \|F\|_{Y^\sigma(I_0)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac12}(J)}\Big\}. \tag{4.61}$$

Remarquons que sur $I_1 = (z_1, 0)$ on a $\theta(z) = 1$ et $\widetilde{w} = \widetilde{v}$ de sorte que

eq:TA
$$(\partial_z - T_A)\widetilde{w} = \underline{w}, \quad z \in (z_1, 0). \tag{4.62}$$

On peut encore appliquer le Lemme 10.27 de manière rétrograde à l'opérateur $\partial_z - T_A$ sur l'intervalle $(z_1, 0)$; comme $\widetilde{w}|_{z=0} = \psi$ il vient

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x \widetilde{v}\|_{X^{\sigma+\frac12}(I_1)} &\leq \|\widetilde{v}\|_{X^{\sigma+\frac32}(I_1)} \\
&\leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}\big)\big(\|\underline{w}\|_{Y^{\sigma+\frac32}(I_1)} + \|\psi\|_{H^{\sigma+\frac32}}\big) \\
&\leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}\big)\big(\|\underline{w}\|_{X^{\sigma+\frac12}(I_1)} + \|\psi\|_{H^{\sigma+\frac32}}\big) \\
&\leq \mathcal{F}\big(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}\big)\Big\{\|\psi\|_{H^{\sigma+\frac32}} + \|F\|_{Y^\sigma(I_1)} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{v}\|_{X^{-\frac12}(J)}\Big\}.
\end{aligned}$$

On obtient une estimation analogue pour $\partial_z\widetilde{v}$ en utilisant l'équation et (4.61). Ceci prouve (4.56) et termine la récurrence.

Cas 2. La même méthode est applicable à la preuve du fait que $(\mathcal{K}_\sigma)$ implique $(\mathcal{K}_{\sigma+\frac12})$ tant que $\sigma + \frac12 \leq s - \frac12$. $\square$

*Démonstration du Théorème 4.17.* On examine simultanément les cas 1 et 2. Rappelons que

$$G(\eta)\psi = \big(g_1\partial_z\widetilde{\phi} - g_2 \cdot \nabla_x\widetilde{\phi}\big)|_{z=0}, \quad g_1 = \frac{1 + |\nabla_x\rho|^2}{\partial_z\rho}, \quad g_2 = \nabla_x\rho.$$

On posera

$$g_j|_{z=0} = g_j^0, \quad j = 1, 2, \quad A|_{z=0} = A^0, \quad a|_{z=0} = a^0, \quad \underline{w}^0 = \underline{w}|_{z=0}.$$

Rappelons également que $\widetilde{\phi}|_{z=0} = \psi$ et que $\big(\partial_z - T_A\big)\widetilde{\phi} = \underline{w}$ pour $z \in I_1$. Par conséquent

DN2
$$\begin{aligned}
G(\eta)\psi &= g_1^0(\partial_z\widetilde{\phi})|_{z=0} - g_2^0 \cdot \nabla_x\psi \\
&= (g_1^0 T_{A_0} - g_2^0 \cdot \nabla_x)\psi + R_1, \quad R_1 = g_1^0\underline{w}^0.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Nos allons estimer le reste $R_1$. Rappelons (voir (4.24)) que $\frac{1}{\partial_z\rho} = \frac{1}{M} + F(Q(z, D_x)\eta)$. On en déduit que

g10
$$R_1 = \frac{\underline{w}^0}{M} + \widetilde{g}_1^0\underline{w}, \quad \widetilde{g}_1^0 = \frac{1}{M}|\nabla_x\eta|^2 + F(Q(z, D_x)\eta) + F(Q(z, D_x)\eta)|\nabla_x\eta|^2. \tag{4.64}$$

Remarquons que pour tout $\sigma > 0$ on a

est:g10 (4.65)
$$\|\widetilde{g}_1^0\|_{H^\sigma} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\eta\|_{H^{\sigma+1}}.$$

Si $0 \leq t \leq s_0 - \frac{1}{2}$ le Théorème 10.10 permet d'écrire

$$\|\widetilde{g}_1^0 \underline{w}^0\|_{H^t} \leq C\|\widetilde{g}_1^0\|_{H^{s_0-\frac{1}{2}}}\|\underline{w}^0\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\underline{w}^0\|_{H^t}.$$

et si $s_0 - \frac{1}{2} \leq t \leq s - \frac{1}{2}$ on écrit

$$\begin{aligned}\|\widetilde{g}_1^0 \underline{w}^0\|_{H^t} &\leq C\big(\|\widetilde{g}_1^0\|_{H^{s_0-1}}\|\underline{w}^0\|_{H^t} + \|\widetilde{g}_1^0\|_{H^t}\|\underline{w}^0\|_{H^{s_0-1}}\big)\\ &\leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\big(\|\underline{w}^0\|_{H^t} + \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}\|\underline{w}^0\|_{H^{s_0-1}}\big).\end{aligned}$$

D'après le Lemme 10.24 on a

$$\|\underline{w}^0\|_{H^t} \leq C\big(\|\underline{w}\|_{L^2(I_0,H^{t+\frac{1}{2}})} + \|\partial_z \underline{w}\|_{L^2(I_0,H^{t-\frac{1}{2}})}\big).$$

L'inégalité (4.61) avec $\sigma = t - \frac{1}{2}$ permet d'écrire

$$\|\underline{w}\|_{L^2(I_0,H^{t+\frac{1}{2}})} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}}$$

tandis que (4.58) implique que

$$\|\partial_z \underline{w}\|_{L^2(I_0,H^{t-\frac{1}{2}})} \leq \|T_a \underline{w}\|_{L^2(I_0,H^{t-\frac{1}{2}})} + \sum_{j=1}^{4}\|F_j\|_{L^2(I_0,H^{t-\frac{1}{2}})}.$$

On déduit des estimations obtenues sur les $F_j$ que

$$\|\partial_z \underline{w}\|_{L^2(I_0,H^{t-\frac{1}{2}})} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que dans le premier cas on a

est:R11 (4.66)
$$\|R_1\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}}$$

et dans le deuxième

est:R12 (4.67)
$$\|R_1\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0}})\big(\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} + \|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}} + 1\big).$$

Ensuite on peut écrire

encoreR (4.68)
$$\begin{aligned}(g_1^0 T_{A_0} - g_2^0 \cdot \nabla_x)\psi &= T_{g_1^0 A_0 - i\xi\cdot g_2^0} + R_2 + R_3,\\ R_2 &= (g_1^0 - T_{g_1^0})T_{A_0}\psi - (g_2^0 - T_{g_2^0})\cdot\nabla_x\psi\\ R_3 &= T_{g_1^0}T_{A_0} - T_{g_1^0 A_0}.\end{aligned}$$

Comme $T_1 = Id + \chi(D)$ où $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ on déduit de (4.64) que $(g_1^0 - T_{g_1^0}) = (\widetilde{g}_1^0 - T_{\widetilde{g}_1^0}) + \chi_1(D)$.

Si $t \leq s_0 - \frac{1}{2}$ on utilise le Théorème 10.11 avec $s_0 = t, s_1 = s_0 - \frac{1}{2}, s_2 = t - \frac{1}{2}$ et on déduit

$$\|R_2\|_{H^t} \leq \|(g_1^0 - T_{g_1^0})T_{A_0}\psi\|_{H^t} + \|(g_2^0 - T_{g_2^0})\cdot\nabla_x\psi\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}}$$

et il résulte du Théorème 10.18 que

$$\|R_3\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{t+\frac{1}{2}}}.$$

Si $s_0 - \frac{1}{2} \leq t \leq s - \frac{1}{2}$ on utilise comme ci-dessus le Théorème 10.11 avec $s_0 = t, s_1 = s - \frac{1}{2}, s_2 = s_0 - \frac{1}{2}$ et (4.65). Il vient

$$\|R_2\|_{H^t} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0+\frac{1}{2}}})(\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} + 1).$$

L'estimation de $R_3$ st analogue à ci-dessus. En résumé on obtient

$$G(\eta)\psi = T_{g_1^0 A_0 - i\xi\cdot g_2^0} + R_4$$

où $R_4$ vérifie les mêmes estimations que les $R_j, j = 1,2,3$. Le Théorème 4.17 découle de l'égalité

$$g_1^0 A_0 - i\xi \cdot g_2^0 = \sqrt{(1+|\nabla_x\eta|^2)|\xi|^2 - (\nabla_x\eta\cdot\xi)^2}.$$

$\square$

## 4.4 Contraction pour l'opérateur de Dirichlet Neumann

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

contractionDN **Théorème 4.26.** *Soit $s > 1 + \frac{d}{2}$. Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tous $\eta_1, \eta_2 \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d), f \in H^s(\mathbf{R}^d)$ on a*

contr:DN
$$\|G(\eta_1)f - G(\eta_2)f\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta_1,\eta_2)\|_{H^{s+\frac{1}{2}}\times H^{s+\frac{1}{2}}}\big)\|\eta_1-\eta_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|f\|_{H^s}. \tag{4.69}$$

*Démonstration.*

**Notation 4.27.** On notera $\mathcal{A}$ le membre de droite de l'inégalité 4.69 où $\mathcal{F}$ pourra changer d'une ligne à l'autre.

Pour $j = 1,2$ on introduit $\rho_j, \widetilde{\phi}_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ comme dans (4.13), (4.25), (4.19). Si $\widetilde{\phi}_j|_{z=0} = f$ on a

DNj
$$G(\eta_j)f = \Big(\frac{1+|\nabla_x\eta_j|^2}{\partial_z\rho_j}\partial_z\widetilde{\phi}_j - \nabla_x\rho_j\cdot\nabla_x\widetilde{\phi}_j\Big)|_{z=0} := U_j|_{z=0}. \tag{4.70}$$

Posons $U = U_1 - U_2$. D'après le Lemme 10.24 l'inégalité (4.69) sera une conséquence de l'estimation suivante

est:Uj
$$\|U\|_{L^2(I,H^{s-1})} + \|\partial_z U\|_{L^2(I,H^{s-2})} \leq \mathcal{A}, \quad I = (-1,0). \tag{4.71}$$

Posons $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}_1 - \widetilde{\phi}_2 = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$. Alors (4.71) sera une conséquence de l'estimation suivante

est:phitilde
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{L^2(I,H^{s-1})} \leq \mathcal{A}. \tag{4.72}$$

En effet un terme de $U$ s'écrit

$$\nabla_x \rho_2 \cdot \nabla_x \widetilde{\phi}_2 - \nabla_x \rho_1 \cdot \nabla_x \widetilde{\phi}_1 = -\nabla_x \rho_2 \cdot \nabla_x \widetilde{\phi} + \nabla_x(\rho_2 - \rho_1) \cdot \nabla_x \widetilde{\phi}_1.$$

Ensuite $H^{s-1}$ étant une algèbre, puisque $s > 1 + \frac{d}{2}$, on peut écrire

$$\|\nabla_x \rho_2 \cdot \nabla_x \widetilde{\phi}\|_{L^2(I,H^{s-1}} \leq C \|\nabla_x \rho_2\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \|\nabla_x \widetilde{\phi}\|_{L^2(I,H^{s-1})} \leq C' \|\eta_2\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} \|\nabla_x \widetilde{\phi}\|_{L^2(I,H^{s-1})} \leq \mathcal{A}$$

d'après (4.72). D'autre part

$$\begin{aligned} \|\nabla_x(\rho_2 - \rho_1) \cdot \nabla_x \widetilde{\phi}_1\|_{L^2(I,H^{s-1})} &\leq \|\nabla_x(\rho_2 - \rho_1)\|_{L^2(I,H^{s-1})} \|\nabla_x \widetilde{\phi}_1\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \\ &\leq C \|\eta_1 - \eta_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}} \|f\|_{H^s} \leq \mathcal{A}, \end{aligned}$$

d'après le théorème de régularité elliptique appliqué à $\phi_1$. Le deuxième terme de $U$ se traite de la même manière.

Enfin, on a d'après (4.20)

$$\partial_z U = \operatorname{div}_x \big( \nabla_x \rho_1 \partial_z \widetilde{\phi}_1 - \nabla_x \rho_2 \partial_z \widetilde{\phi}_2 + \partial_z \rho_2 \nabla_x \widetilde{\phi}_2 - \partial_z \rho_1 \nabla_x \widetilde{\phi}_1 \big)$$

de sorte que

$$\|\partial_z U\|_{L^2(I,H^{s-2})} \leq \|\nabla_x \rho_1 \partial_z \widetilde{\phi}_1 - \nabla_x \rho_2 \partial_z \widetilde{\phi}_2 + \partial_z \rho_2 \nabla_x \widetilde{\phi}_2 - \partial_z \rho_1 \nabla_x \widetilde{\phi}_1\|_{L^2(I,H^{s-1})}$$

et nous sommes ramenés au cas précédent.

Il reste donc à prouver (4.72). Nous aurons besoin du résultat suivant.

alpha1-alpha2 **Lemme 4.28.** *Soit* $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), i = 1, 2$ *définis en* (4.19) *et* $J = (z_0, 0)$. *Il existe* $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *croissante telle que*

$$\begin{aligned} \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{L^2(J,H^{s-1})} + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(J,H^{s-1})} + \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^2(J,H^{s-2})} \\ \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1, \eta_2)\|_{H^{s+\frac{1}{2}} \times H^{s+\frac{1}{2}}}) \|\eta_1 - \eta_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{4.73}$$

*Démonstration.* Posons $F(\xi) = \frac{|\xi|^2}{1+|\xi|^2}, \xi \in \mathbf{R}^d$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned} &\alpha_1 - \alpha_2 = (1) + (2) + (3), \qquad \text{où} \qquad &&(1) = (\partial_z \rho_1)^2 - (\partial_z \rho_2)^2 \\ &\qquad (2) = (\partial_z \rho_1)^2 [F(\nabla_x \rho_2) - F(\nabla_x \rho_1)], &&(3) = [(\partial_z \rho_2)^2 - (\partial_z \rho_1)^2] F(\nabla_x \rho_2). \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 10.10 et le Lemme 10.28 (sur le noyau de Poisson) il vient

$$\begin{aligned} \|(1)\|_{L^2(J,H^{s-1})} &\leq C \|\partial_z(\rho_1 - \rho_2)\|_{L^2(J,H^{s-1})} \|\partial_z(\rho_1 + \rho_2)\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{1}{2}})}, \\ &\leq C' \|\eta_1 - \eta_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}} (\|\eta_1\|_{H^{s+\frac{1}{2}}} \|\eta_2\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}). \end{aligned}$$

Pour estimer le terme (2) on écrit

$$F(\nabla_x \rho_2) - F(\nabla_x \rho_1) = \int_0^1 \nabla_\xi F(t \nabla_x \rho_1 + (1-t) \nabla_x \rho_2) \cdot \nabla_x (\rho_2 - \rho_1) \, dt.$$

Comme $\nabla_\xi F$ est $C^\infty$-bornée et nulle en zéro on déduit du Théorème 10.10 et de (10.12) que

$$\|(2)\|_{L^2(J,H^{s-1})} \leq C\|\nabla_x(\rho_2-\rho_1)\|_{L^2(J,H^{s-1})}\int_0^1 \|\nabla_\xi F(t\nabla_x\rho_1+(1-t)\nabla_x\rho_2)\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{1}{2}})}\,dt\cdot \\ \cdot\|\partial_z\rho_1\|^2_{L^\infty(J,H^{s-\frac{1}{2}})} \leq C'\mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2)\|_{H^{s+\frac{1}{2}}\times H^{s+\frac{1}{2}}})\|\eta_1-\eta_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}.$$

L'estimation des deux autres termes est tout à fait analogue. $\square$

Revenons à la preuve de (4.72). Comme $\widetilde{P}_j\widetilde{\phi}_j=0$ on peut écrire

F+G (4.74)
$$\begin{cases} \widetilde{P}_1\widetilde{\phi}=(\widetilde{P}_2-\widetilde{P}_1)\widetilde{\phi}_2=F+\partial_z G \\ F=\operatorname{div}\big(\partial_z(\rho_2-\rho_1)\nabla_x\widetilde{\phi}_2\big)+\operatorname{div}\big(\nabla_x(\rho_1-\rho_2)\partial_z\widetilde{\phi}_2\big) \\ G=\nabla_x(\rho_1-\rho_2)\cdot\nabla_x\widetilde{\phi}_2+\Big(\dfrac{1+|\nabla_x\rho_2|^2}{\partial_z\rho_2}-\dfrac{1+|\nabla_x\rho_1|^2}{\partial_z\rho_1}\Big)\partial_z\widetilde{\phi}_2. \end{cases}$$

Par le même argument que celui utilisé dans la preuve de (4.71) on a

(4.75)
$$\|F\|_{L^2(I,H^{s-2})}+\|G\|_{L^2(I,H^{s-1})}\leq\mathcal{A}.$$

On déduit du Théorème 4.18 que

estim:2 (4.76)
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{L^2(I,H^{s-1})}\leq\mathcal{F}(\|\eta_1\|_{H^{s+\frac{1}{2}}})\big(\mathcal{A}+\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{X^{-\frac{1}{2}}(I)}\big).$$

Donc (4.72) sera une conséquence de l'estimation

estim:3 (4.77)
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{X^{-\frac{1}{2}}(I)}\leq\mathcal{A}.$$

Rappelons que $\widetilde{\phi}=\widetilde{\phi}_1-\widetilde{\phi}_2=\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2$. On reprend la notation de (4.17); on note $\Lambda_1^j,\Lambda_2^j$ les opérateurs correspondants aux $\rho_j$, puis on pose $\Lambda^j=(\Lambda_1^j,\Lambda_2^j)$. Compte tenu de (4.9) les $\widetilde{u}_j$ sont caractérisés par

eq:vartilde (4.78)
$$\iint\Lambda^1\widetilde{u}_1\cdot\Lambda^1 v\,dxdz=\iint\Lambda^1\underline{\widetilde{\psi}}\cdot\Lambda^1 v\,dxdz,\quad \iint\Lambda^2\widetilde{u}_2\cdot\Lambda^2 v\,dxdz=\iint\Lambda^2\underline{\widetilde{\psi}}\cdot\Lambda^2 v\,dxdz.$$

où $v\in H^{1,0}(\mathbf{R}^d)$ est à support dans $(-1,0)\times\mathbf{R}^d$. Compte tenu de la première égalité de (4.78) on peut écrire

$$\iint\Lambda^1(\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2)\cdot\Lambda^1 v=\iint(\Lambda^1-\Lambda^2)\underline{\widetilde{\psi}}\cdot\Lambda^1 v+\iint\Lambda^2\underline{\widetilde{\psi}}\cdot\Lambda^2 v+\iint\Lambda^2\underline{\widetilde{\psi}}\cdot(\Lambda^1-\Lambda^2)v \\ +\iint(\Lambda^2-\Lambda^1)\widetilde{u}_2\cdot\Lambda^1 v-\iint\Lambda^2\widetilde{u}_2\cdot\Lambda^2 v+\iint\Lambda^2\widetilde{u}_2\cdot(\Lambda^2-\Lambda^1)v.$$

Compte tenu de la deuxième égalité de (4.78) on en déduit

eq:var:cons (4.79)
$$\iint\Lambda^1(\widetilde{u}_1-\widetilde{u}_2)\cdot\Lambda^1 v=\iint(\Lambda^1-\Lambda^2)\underline{\widetilde{\psi}}\cdot\Lambda^1 v+\iint\Lambda^2\underline{\widetilde{\psi}}\cdot(\Lambda^1-\Lambda^2)v+\iint(\Lambda^2-\Lambda^1)\widetilde{u}_2\cdot\Lambda^1 v \\ +\iint\Lambda^2\widetilde{u}_2\cdot(\Lambda^2-\Lambda^1)v.$$

Nous avons $\widetilde{\phi} = \widetilde{u}_1 - \widetilde{u}_2$ et dans cette égalité nous allons prendre $-1 < z_0 < 0$ et

$$v = \chi(z)\widetilde{\phi} \quad \text{où } \chi \in C^\infty(\mathbf{R}), \quad \chi(z) = 0 \quad \text{si} \quad z \leq -1, \quad \chi(z) = 1 \quad \text{si} \quad z \geq z_0.$$

Ensuite on remarque que

lambda1-lambda2

$$\begin{aligned} &\Lambda_1^1 - \Lambda_1^2 = a(x,z)\Lambda_1^1, \quad \Lambda_2^1 - \Lambda_2^2 = b(x,z)\Lambda_1^1, \\ &a(z,x) = \frac{\partial_z(\rho_2 - \rho_1)}{\partial_z \rho_2}, \quad b(x,z) = \frac{\nabla_x(\rho_2-\rho_1)\partial_z\rho_1 + \nabla_x\rho_1\partial_z(\rho_1-\rho_2)}{\partial_z\rho_2}. \end{aligned} \tag{4.80}$$

On voit facilement qu'avec $J = (-1,0)$ et $g = a, b$ on a

$$\|g\|_{L^2(J,L^\infty)} \leq C\|g\|_{L^2(J,H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2)\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}})\|\eta_1 - \eta_2\|_{H^{s-\frac12}}.$$

Compte tenu de ce qui precède chaque terme du membre de droite de (4.79) est de la forme $I = \iint_{J\times\mathbf{R}^d} gU_1U_2\,dxdz$ que l'on majore ainsi

$$|I| \leq \|g\|_{L^2(J,H^{s-1})}\|U_1\|_{L^\infty(J,L^2)}\|U_2\|_{L^\infty(J,L^2)}.$$

On utilise alors l'estimation

$$\|\Lambda^j\underline{\widetilde{\psi}}\|_{L^\infty(J,L^2)} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2)\|_{W^{1,\infty}\times W^{1,\infty}})\|\psi\|_{H^1}$$

ainsi que

$$\|\Lambda^j\widetilde{u}_k\|_{L^\infty(J,L^2)} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2,\psi)\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^1}), \quad j,k = 1,2.$$

qui découle de (4.40) avec $\sigma = 0$.

Ensuite comme $\widetilde{\phi}|_{z=0} = 0$ l'inégalité de Poincaré et l'estimation (4.10) montrent que

$$\|\Lambda^j v\|_{L^\infty(J,L^2)} \leq C\sum_{k,l=1}^{2}\|\Lambda^l\widetilde{u}_k\|_{L^\infty(J,L^2)} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2,\psi)\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^1}).$$

Il résulte de (4.79) que

$$\|\Lambda^1\widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),L^2)} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2,\psi)\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^s})\|\eta_1-\eta_2\|_{H^{s-\frac12}}$$

d'où l'on déduit aisement

est:nablaphi

$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),L^2)} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2,\psi)\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^1})\|\eta_1-\eta_2\|_{H^{s-\frac12}}. \tag{4.81}$$

Pour conclure la preuve du lemme il reste à estimer $\|\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{L^\infty((z_0,0),H^{-\frac12})}$. Pour cela on utilise le Lemme 10.24 et il suffit donc d'estimer la quantité $\|\partial_z\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})}$. L'estimation de $\|\partial_z\nabla_x\widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})}$ résulte de la première partie. Il reste à considérer $\|\partial_z^2\widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})}$. Compte tenu des équations vérifiées par le $\widetilde{\phi}_j$ on voit facilement que

F1+F2

$$\begin{cases} \partial_z^2\widetilde{\phi} = F_1 + F_2 \\ F_1 = -(\alpha_1\Delta_x + \beta_1\cdot\nabla_x\partial_z - \gamma_1\partial_z)\widetilde{\phi} \\ F_2 = \{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta_x + (\beta_2-\beta_1)\nabla_x\partial_z - (\gamma_2-\gamma_1)\partial_z\}\widetilde{\phi}_2. \end{cases} \tag{4.82}$$

Tout d'abord d'après le Théorème 10.10 on a

$$\begin{aligned}
&\|\alpha_1 \Delta_x \widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0)H^{-1})} \leq C\|\alpha_1\|_{L^\infty((z_0,0)H^{s_0-\frac{1}{2}})}\|\nabla_x \widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),L^2)}\\
&\|\beta_1 \cdot \nabla_x \partial_z \widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})} \leq C\|\beta_1\|_{L^\infty((z_0,0),H^{s_0-\frac{1}{2}})}\|\partial_z \widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),L^2)}\\
&\|\gamma_1 \partial_z \widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})} \leq C\|\gamma_1\|_{L^\infty((z_0,0),H^{s_0-\frac{3}{2}})}\|\partial_z \widetilde{\phi}\|_{L^2((z_0,0),L^2)}.
\end{aligned}$$

Le Lemme 4.11 et (4.81) montrent que

$$\|F_1\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2,\psi)\|_{H^{s+\frac{1}{2}}\times H^{s+\frac{1}{2}}\times H^s})\|\eta_1-\eta_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}..$$

Toujours d'après le Théorème 10.10 on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\|F_2\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})} \leq C\big\{\|\alpha_1-\alpha_2\|_{L^2((z_0,0),H^{s-1})}\|\nabla_x \widetilde{\phi}_2\|_{L^\infty((z_0,0),L^2)}\\
&\quad + \|\beta_1-\beta_2\|_{L^2((z_0,0),H^{s-1})}\|\nabla_x \widetilde{\phi}_2\|_{L^\infty((z_0,0),L^2)} + \|\gamma_1-\gamma_2\|_{L^\infty((z_0,0),H^{s-2})}\|\nabla_x \widetilde{\phi}_2\|_{L^\infty((z_0,0),L^2)}\big\}
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 4.28 on obtient

$$\|F_2\|_{L^2((z_0,0),H^{-1})} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2,\psi)\|_{H^{s+\frac{1}{2}}\times H^{s+\frac{1}{2}}\times H^s})\|\eta_1-\eta_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}$$

et termine la preuve du lemme compte tenu de (4.82). □

# 5 La pression

pression

Comme on le voit, dans la formulation de Craig-Sulem-Zaharov (2.12) la pression a disparu des équations. Si l'objectif est de justifier l'heuristique consistant à dire que résoudre ce système revient à résoudre les équations d'Euler il nous faut en particulier reconstruire la pression. Voici comment on procède.

Soit $s > 1 + \frac{d}{2}$. Soit $(\eta,\psi) \in C^0([0,T], H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$ une solution de (2.12) et $\phi$ la solution variationnelle de (4.11). Alors si on note $B = (\partial_y \phi)|_\Sigma, V = (\nabla_x \phi)|_\Sigma$ (où $\Sigma = \{(x,y) : y = \eta(t,x)\}$), il résulte de (2.13) que

$$B, V \in C^0([0,T], H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)).$$

On en déduit que

$$g\eta + \frac{1}{2}(B^2 + |V|^2) \in C^0([0,T], H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)).$$

Soit alors $Q$ la solution variationnelle (pour chaque $t$ fixé) du problème

eq:Q (5.1)
$$\begin{cases} \Delta_{x,y} Q = 0, & \text{dans } \Omega,\\ Q|_\Sigma = g\eta + \frac{1}{2}(B^2 + |V|^2). \end{cases}$$

Posons

def:press (5.2)
$$P = Q - gy - \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2, \quad v = \nabla_{x,y}\phi.$$

On a alors le théorème suivant.

**Théorème 5.1.** $(\eta, v, P)$ *est la solution du système 1.14.*

Ce résultat, au niveau de régularité auquel nous sommes ($s > 1 + \frac{d}{2}$), n'est pas facile à démontrer et nous renvoyons à l'article (ABZ-Bertinoro) pour les détails.

## 6 Le coefficient de Taylor

Il est défini formellement par l'égalité

$$\mathfrak{a} = -\frac{\partial P}{\partial y}|_\Sigma \tag{6.1}$$

où $P$ est la pression et $\Sigma = \{(x, y) : y = \eta(x)\}$. Remarquons que puisque $P = 0$ sur $\Sigma$ on a également

$$\mathfrak{a} = \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla_x \eta(x)|^2}} \frac{\partial P}{\partial n}|_\Sigma$$

où $n$ est la normale unitaire sortante à $\Sigma$.

En effet en dérivant la relation $P(x, \eta(x)) = 0$ on obtient $\nabla_x P = -\nabla_x \eta \frac{\partial P}{\partial y}$. D'autre part $\frac{\partial P}{\partial n}|_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla_x \eta(x)|^2}} \big(\frac{\partial P}{\partial y} - \nabla_x \eta \cdot \nabla_x P\big)(x, \eta(x)) = \sqrt{1 + |\nabla_x \eta(x)|^2} \frac{\partial P}{\partial y}|_\Sigma$.

Le signe de ce coefficient va jouer un rôle important dans l'analyse du problème. Lorsqu'il n'y a pas de fond S.Wu a montré le résultat suivant.

Taylor-Wu **Proposition 6.1.** *Soit* $(\eta, v, P)$ *une solution régulière du problème* (1.14) *dans* $\Omega = \{(x, y) : x \in \mathbf{R}^d, y < \eta(x)\}$. *Il existe une constante* $c_0 > 0$ *ne dépendant que de la dimension telle que*

$$\mathfrak{a} \geq c_0.$$

*Démonstration.* Ce résultat exprime le fait que la pression augmente lorsqu'on se déplace de l'air vers le fluide. On commence par une preuve formelle de ce résultat, (i.e. on suppose que les calculs qui la composent peuvent être faits) les justifications étant données à la fin. Rappelons que $(v, P)$ sont liés par l'équation dans $\Omega$

euler:bis
$$\partial_t v + (v \cdot \nabla_{x,y}) v = -\nabla_{x,y}(P + gy) \tag{6.2}$$

et que $\mathrm{div}_{x,y} v = 0$ dans $\Omega$. On a tout d'abord $\mathrm{div}_{x,y}(\partial_t v) = \partial_t(\mathrm{div}_{x,y} v) = 0$. Ensuite en notant $y = x_{d+1}$ on a $(v \cdot \nabla_{x,y}) v = \big(\sum_{k=1}^{d+1} v_k \partial_{x_k} v_j\big)_j$ de sorte que

$$\mathrm{div}_{x,y}\big(v \cdot \nabla_{x,y}\big) v = \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{k=1}^{d+1} \partial_{x_j} v_k \partial_{x_k} v_j + (v \cdot \nabla_{x,y}) \mathrm{div}_{x,y} v = \sum_{j=1}^{d+1} \sum_{k=1}^{d+1} \big(\partial_{x_j} v_k\big)^2 := |\nabla_{x,y} v|^2.$$

Enfin $\mathrm{div}_{x,y}\big(\nabla_{x,y}(P + gy)\big) = \Delta_{x,y}(P + gy)$. Par conséquent en prenant la divergence de l'équation (6.2) on voit que $P$ vérifie l'équation

Delta:P
$$\Delta_{x,y}(P + gy) = -|\nabla_{x,y} v|^2. \tag{6.3}$$

Soit $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d), h \geq 0$ et $w$ l'unique solution variationnelle du problème

Delta:w

$$\Delta_{x,y} w = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad w|_\Sigma = h. \tag{6.4}$$

Alors d'après la Proposition 10.38 $w$, est non négative, régulière jusqu'au bord et on a $w = \mathcal{O}(|(x,y)|^{-d}), \nabla_{x,y} w = \mathcal{O}(|(x,y)|^{-d-1})$ lorsque $|(x,y)| \to +\infty$. Appliquons la formule de Green dans $\Omega$. Il résulte de (6.3) et (6.4) que

$$\int_\Sigma \Big( (P+gy)\frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial (P+gy)}{\partial n} \Big)\, d\sigma = \iint_\Omega w |\nabla_{x,y} v|^2.$$

Comme $P = 0$ sur $\Sigma$ et $w|_\Sigma = h$ on obtient

eq:taylor1

$$\int_\Sigma -\frac{\partial P}{\partial n} h \, d\sigma = \int_\Sigma \big( gh \frac{\partial y}{\partial n} - gy \frac{\partial w}{\partial n} \big)\, d\sigma + \iint_\Omega w|\nabla_{x,y} v|^2. \tag{6.5}$$

Nous allons calculer le premier terme du membre de droite. Soit $b \in \mathbf{R}$ tel que $\Sigma_b = \{(x,y) : y = b\}$ est contenu dans $\Omega$. Notons $\mathcal{O} = \{(x,y) : x \in \mathbf{R}^d, b < y < \eta(x)\}$. On a $\partial \mathcal{O} = \Sigma \cup \Sigma_b$. Si $\nu$ est la normale extérieure à $\mathcal{O}$ on a $\nu = n$ sur $\Sigma$ et $\nu = (0,-1)$ sur $\Sigma_b$. Appliquons la formule de Green dans $\mathcal{O}$ aux fonctions harmoniques $w$ et $gy$. Il vient

eq:taylor2

$$\int_\Sigma \big( gh \frac{\partial y}{\partial n} - gy \frac{\partial w}{\partial n} \big)\, d\sigma = \int_{\Sigma_b} \big( gw \frac{\partial y}{\partial y} - gy \frac{\partial w}{\partial y} \big)\, d\sigma_b = \int_{\Sigma_b} gw \, d\sigma_b - gb \int_{\Sigma_b} \frac{\partial w}{\partial y}\, d\sigma_b. \tag{6.6}$$

Soit $\Omega_b : \{(x,y) : x \in \mathbf{R}^d, y < b\}$. Appliquons la formule de Green $(*)$ aux fonctions harmoniques $w$ et 1 dans $\Omega_b$. Il vient

$$\int_{\Sigma_b} \frac{\partial w}{\partial y}\, d\sigma_b = 0.$$

On déduit alors de (6.5), (6.6) et du fait que $w \geq 0$ que

eq:taylor3

$$\int_\Sigma -\frac{\partial P}{\partial n} h\, d\sigma = \iint_\Omega w |\nabla_{x,y} v|^2 + \int_{\Sigma_b} gw \, d\sigma_b \geq \int_{\Sigma_b} gw\, d\sigma_b. \tag{6.7}$$

Notons $X = (x,y) \in \mathbf{R}^{d+1}$ et soit $G(X,X')$ la fonction de Green pour le domaine $\Omega$. On a alors la formule de représentation

$$w(X) = \int_\Sigma h(X') \frac{\partial}{\partial n_{X'}} G(X,X')\, d\sigma(X'), \quad X \in \Omega.$$

On déduit de (6.7) que

$$\int_\Sigma -\frac{\partial P}{\partial n}(X') h(X')\, d\sigma(X') \geq \int_{\Sigma_b} gw(Z)\, d\sigma_b(Z) = \int_\Sigma h(X') \Big( \int_{\Sigma_b} \frac{\partial}{\partial n_{X'}} G(Z,X')\, d\sigma_b(Z) \Big) d\sigma(X').$$

Comme $h \in C_0^\infty(\Sigma), h \geq 0$ est quelconque on en déduit que

$$\mathfrak{a}(X') = -\frac{\partial P}{\partial n}(X') \geq \int_{\Sigma_b} \frac{\partial}{\partial n_{X'}} G(Z,X')\, d\sigma_b(Z).$$

On montre alors qu'il existe $c > 0$ tel que

eq:taylor4

$$\int_{\Sigma_b} \frac{\partial}{\partial n_{X'}} G(Z, X')\, d\sigma_b(Z) \geq c, \tag{6.8}$$

ce qui concluera la preuve de la proposition.

Justifications:

$(*)$ Notons $X = (x, y)$. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{d+1}), \chi(X) = 1$ si $|X| \leq \frac{1}{2}, \chi(X) = 0$ si $|X| \geq 1$. Pour $R > 0$ on pose $\chi_R(X) = \chi\big(\frac{X-(0,b)}{R}\big)$. Comme $\Delta w = 0$ dans $\Omega_b$ la formule de Green permet d'écrire

$$\begin{aligned} A_1 := \int_{\Omega_b} \frac{w(X)}{R^2} (\Delta\chi)\Big(\frac{X-(0,b)}{R}\Big) dX &= \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial w}{\partial y}(x,b)\chi_R(x,0)\, dx - \int_{\mathbf{R}^d} \frac{w(x,b)}{R} \frac{\partial \chi}{\partial y}\Big(\frac{x}{R}, 0\Big)\, dx \\ &:= A_2 + A_3. \end{aligned}$$

On a pour $R$ assez grand

$$|A_1| \leq \frac{C}{R^2} \int_{|X-(0,b)| \geq \frac{1}{2}R} \frac{1}{|X|^d} \Big|\Delta\chi\Big(\frac{X-(0,b)}{R}\Big)\Big|\, dX \leq \frac{C'}{R^2} \int_{|X'| \geq \frac{1}{3}} \frac{|\Delta\chi(X')|}{|X' + \frac{(0,b)}{R}|^{d-1}}\, dX' \to 0.$$

Ensuite comme $|\frac{\partial w}{\partial y}(x,b)| \leq \frac{C}{(|x|^2+b^2)^{\frac{d+1}{2}}}$ le Théorème de convergence dominée montre que $A_2 \to \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial w}{\partial y}(x,b)\, dx$. Enfin

$$|A_3| \leq \frac{C}{R} \int_{|x| \geq \frac{R}{2}} \frac{1}{|x|^d} \left|\frac{\partial \chi}{\partial y}\Big(\frac{x}{R}, 0\Big)\right|\, dx \leq \frac{C}{R} \int_{|x| \geq \frac{1}{2}} \frac{1}{|x'|^d} \left|\frac{\partial \chi}{\partial y}(x', 0)\right|\, dx' \to 0.$$

On en déduit que $\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial w}{\partial y}(x,b)\, dx = 0$. $\square$

## 7 Estimations a priori

:est-a-priori

Pour $T > 0$ on introduit les quantités suivantes.

Ms(T)

$$\begin{aligned} M_s(T) &:= \sup_{t \in [0,T]} \|(\eta(t), \psi(t), B(t), V(t))\|_{H^{s+\frac{1}{2}} \times H^{s+\frac{1}{2}} \times H^s \times H^s}, \\ M_{s,0} &:= \|(\eta(0), \psi(0), B(0), V(0))\|_{H^{s+\frac{1}{2}} \times H^{s+\frac{1}{2}} \times H^s \times H^s}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

est-a-priori

**Théorème 7.1.** *Soit $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour toute solution régulière $(\eta, \psi)$ sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d$ du système (2.12) on a*

est:princ

$$M_s(T) \leq \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)\big(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}} M_s(T)\big). \tag{7.2}$$

La preuve de ce résultat nécessitera plusieurs étapes.

## 7.1 Reformulation des équations

On introduit les inconnues suivantes

inconnues (7.3)
$$\zeta = \nabla_x \eta, \quad B = (\partial_y \phi)|_{y=\eta(t,x)}, \quad V = (\nabla_x \phi)|_{y=\eta(t,x)}, \quad \mathfrak{a} = -(\partial_y P)|_{y=\eta(t,x)}$$

où $P$ est la pression et on commence par prouver une formule utile.

GB=div **Lemme 7.2.** *Soit $I = [0,T]$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*
$$G(\eta)B = -div\ V + \gamma$$
*avec*
$$\|\gamma\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta,\psi)\|_{L^\infty(I,H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)\times H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))}\big)\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))}$$

*Démonstration.* L'estimation sur $\gamma$ étant d'abord prouvée à $t$ fixé, on l'omettra par la suite. Soit $\theta$ la solution variationnelle du problème
$$\Delta_{x,y}\theta = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \theta|_\Sigma = B.$$
Alors $G(\eta)B = (\partial_y \theta - \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \theta)|_\Sigma$. D'autre part comme $V_i(x) = (\partial_i \phi)(x, \eta(x))$ on a
$$\begin{aligned}
\text{div } V &= \big(\Delta_x \phi + \nabla_x \eta \cdot \partial_y \phi\big)(x,\eta(x)) \\
&= \big(-\partial_y^2 \phi + \nabla_x \eta \cdot \partial_y \phi\big)(x,\eta(x)) \\
&= -\big(\partial_y - \nabla_x \eta \cdot \nabla_x\big)\partial_y \phi(x,\eta(x)).
\end{aligned}$$
On en déduit que
$$G(\eta)B + \text{ div } V = \gamma, \quad \gamma = \big(\partial_y - \nabla_x \eta \cdot \nabla_x\big)\big(\theta - \partial_y \phi\big)|_\Sigma.$$

Posons $\Theta = \theta - \partial_y \phi$ et $U = \big(\partial_y - \nabla_x \eta \cdot \nabla_x\big)\Theta$. On a alors, dans les variables $z$,

Theta (7.4)
$$\widetilde{\Theta} = \widetilde{\theta} - \Lambda_1 \widetilde{\phi}, \quad \widetilde{U} = \big(\Lambda_1 - \nabla_x \rho \cdot \Lambda_2\big)\widetilde{\Theta}, \quad \gamma = \widetilde{U}|_{z=0},$$

car $\nabla_x \rho|_{z=0} = \nabla_x \eta$. D'après le Lemme (10.24) avec $s - \frac{1}{2}$ on a

Ugamma (7.5)
$$\|\gamma\|_{H^{s-\frac{1}{2}}} \leq C\big(\|\widetilde{U}\|_{L^2_z((z_0,0),H^s)} + \|\partial_z \widetilde{U}\|_{L^2_z((z_0,0),H^{s-1})}\big).$$

Estimation de $\widetilde{U}$ : en utilisant (4.24) et le Théorème 10.10 on a

est:Utilde1 (7.6)
$$\begin{aligned}
\|\widetilde{U}\|_{L^2((z_0,0),H^s)} &\leq \|\Lambda_1 \widetilde{\Theta}\|_{L^2((z_0,0),H^s)} + \|\nabla_x \rho \cdot \Lambda_2 \widetilde{\Theta}\|_{L^2((z_0,0),H^s)} \\
&\leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\nabla_{x,z}\widetilde{\Theta}\|_{X^{s-\frac{1}{2}}((z_0,0))}
\end{aligned}$$

Ensuite on a $\Delta_{x,y}\Theta = 0$ dans $\Omega$ et $\Theta|_\Sigma = 0$ (attention $\partial_y \phi$ n'est pas une solution variationnelle). Il résulte du Théorème 4.18 avec $\sigma = s - \frac{1}{2}$ que

est:Theta (7.7)
$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\Theta}\|_{X^{s-\frac{1}{2}}((z_0,0))} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}\times H^{s_0+\frac{1}{2}}})(1 + \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}})\|\nabla_{x,z}\widetilde{\Theta}\|_{X^{-\frac{1}{2}}(J)}.$$

Comme $\theta$ est une solution variationnelle on déduit de (4.29) que

$$\|\nabla_{x,z}\widetilde{\theta}\|_{X^{-\frac{1}{2}}((z_0,0))} \leq \mathcal{F}_1(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|B\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leq \mathcal{F}_2(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{\frac{3}{2}}} \leq \mathcal{F}_3(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite $\phi$ étant une solution variationnelle il résulte du Théorème 4.18 avec $\sigma = \frac{1}{2}$ que

$$\|\nabla_x \Lambda_1 \widetilde{\phi}\|_{X^{-\frac{1}{2}}((z_0,0))} \leq \|\Lambda_1 \widetilde{\phi}\|_{X^{\frac{1}{2}}((z_0,0))} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{\frac{3}{2}}} \leq \mathcal{F}_3(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}.$$

En utilisant l'équation vérifiée par $\phi$ et les lois de produit on montre de la même manière que

$$\|\partial_z \Lambda_1 \widetilde{\phi}\|_{X^{-\frac{1}{2}}((z_0,0))} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{\frac{3}{2}}} \leq \mathcal{F}_3(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\psi\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que

est:Theta2
$$\sum_{j=1}^{2} \|\Lambda_j \widetilde{\Theta}\|_{X^{s-\frac{1}{2}}((z_0,0))} + \|\nabla_{x,z}\widetilde{\Theta}\|_{X^{s-\frac{1}{2}}((z_0,0))} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}} \times H^{s_0+\frac{1}{2}}})(1 + \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}). \tag{7.8}$$

Il résulte alors de (7.6) et (7.8) que

est:Utilde2
$$\|\widetilde{U}\|_{L^2((z_0,0),H^s)} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}} \times H^{s_0+\frac{1}{2}}})(1 + \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}). \tag{7.9}$$

Estimation de $\partial_z \widetilde{U}$: comme $(\Lambda_1^2 + \Lambda_2^2)\widetilde{\Theta} = 0$, en utilisant (4.26) on obtient,

$$\partial_z \widetilde{U} = -\nabla_x((\partial_z \rho)\Lambda_2 \widetilde{\Theta}),$$

de sorte que

est:Utilde3
$$\|\partial_z \widetilde{U}\|_{L^2(z_0,0),H^{s-1})} \leq \|(\partial_z \rho)\Lambda_2 \widetilde{\Theta}\|_{L^2(z_0,0),H^s)} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}} \times H^{s_0+\frac{1}{2}}})(1 + \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}) \tag{7.10}$$

d'après (7.8). Le lemme résulte alors de (7.5), (7.9) et (7.10). □

3eq **Proposition 7.3.** *Soit $I = [0,T]$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Alors pour tout $s \geq s_0$ on a*

eq:B
$$\big(\partial_t + V \cdot \nabla_x\big)B = \mathfrak{a} - g, \tag{7.11}$$

eq:V
$$\big(\partial_t + V \cdot \nabla_x\big)V + \mathfrak{a}\zeta = 0 \tag{7.12}$$

eq:zeta
$$\big(\partial_t + V \cdot \nabla_x\big)\zeta = G(\eta)V + \zeta G(\eta)B + R \tag{7.13}$$

*où le reste $R = R(\eta,\psi,V,B)$ vérifie l'estimation*

est:R
$$\|R\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))} \leq \mathcal{F}(\|(\eta,\psi)\|_{L^\infty(I,H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{s_0+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))})(1 + \|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))}) \tag{7.14}$$

*Démonstration.* Notons tout d'abord que

eq:VB
$$\partial_t \eta + V \cdot \nabla_x \eta = B = (\partial_y \phi)|_\Sigma. \tag{7.15}$$

En effet la première équation de (2.12) et la définition de l'opérateur de Dirichlet-Neumann permettent d'écrire $\partial_t \eta = G(\eta)\psi = \big(\partial_y \phi - \nabla_x \eta \cdot \nabla_x \phi\big)|_\Sigma = B - V \cdot \nabla_x \eta$.

Ensuite pour toute fonction $f = f(t,x,y)$ régulière on a

chainrule
$$\big(\partial_t + V\cdot\nabla_x\big)\big[f(t,x,\eta(t,x))\big] = \big[\partial_t f + \nabla_{x,y}\phi\cdot\nabla_{x,y}f\big](t,x,\eta(t,x)) \tag{7.16}$$

En effet comme $V = (\nabla_x\phi)|_{y=\eta(t,x)}$ on a

$$\big(\partial_t + V\cdot\nabla_x\big)\big[f(t,x,\eta(t,x))\big] = \big[\partial_t f + \nabla_x\phi\cdot\nabla_x f + (\partial_y f)(\partial_t\eta + V\cdot\nabla_x\eta)\big](t,x,\eta(t,x))$$

et (7.16) résulte de (7.15) .

Appliquons (7.16) à $f = \partial_y\phi$. Il vient

$$\big(\partial_t + V\cdot\nabla_x\big)B = \big[\partial_t\partial_y\phi + \nabla_{x,y}\phi\cdot\nabla_{x,y}\partial_y\phi\big](t,x,\eta(t,x)).$$

Ensuite d'après (2.4) on a

eqphi1
$$-P = \partial_t\phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\phi|^2 + gy. \tag{7.17}$$

Dérivons cette égalité par rapport à $y$ et prenons la trace sur $\Sigma$. Il vient, d' après (7.3)

$$\mathfrak{a} = \big[\partial_t\partial_y\phi + \nabla_{x,y}\phi\cdot\nabla_{x,y}\partial_y\phi\big](t,x,\eta(t,x)) + g,$$

ce qui implique (7.11).

Appliquons (7.16) à $f = \partial_{x_k}\phi$. Il vient

$$\big(\partial_t + V\cdot\nabla_x\big)V_k = \big[\partial_t\partial_{x_k}\phi + \nabla_{x,y}\phi\cdot\nabla_{x,y}\partial_{x_k}\phi\big](t,x,\eta(t,x)).$$

Dérivons (7.17) par rapport à $x_k$ prenons la trace sur $\Sigma$. Il vient

$$-(\partial_{x_k}P)(t,x,\eta(t,x)) = \big[\partial_t\partial_{x_k}\phi + \nabla_{x,y}\phi\cdot\nabla_{x,y}\partial_{x_k}\phi\big](t,x,\eta(t,x)).$$

Enfin, en dérivant l'égalité $P(t,x,\eta(t,x)) = 0$ par rapport à $x_k$ il vient

$$\big[\partial_{x_k}P + (\partial_{x_k}\eta)(\partial_y P)\big](t,x,\eta(t,x)) = 0$$

et en prenant la trace sur $\Sigma$ on obtient

$$(\partial_{x_k}P)(t,x,\eta(t,x)) - \mathfrak{a}\zeta_k = 0,$$

ce qui prouve (7.12).

Pour montrer (7.13) on dérive (7.15) par rapport à $x_i$ pour $i = 1,\dots,d$. Il vient

eq:zeta1
$$\big(\partial_t + V\cdot\nabla_x\big)\zeta_i = \partial_i B - \sum_{k=1}^{d}(\partial_i V_k)(\partial_k\eta). \tag{7.18}$$

Utilisant les définitions de $B$ et $V$ et dérivant par rapport à $x_i$ on obtient

$$\begin{aligned}\partial_i B - \sum_{k=1}^{d}(\partial_i V_k)(\partial_k\eta) &= \big[\partial_i\partial_y\phi + (\partial_i\eta)(\partial_y^2\phi)\big]|_\Sigma - \sum_{k=1}^{d}(\partial_k\eta)\big[\partial_i\partial_k\phi + (\partial_i\eta)(\partial_k\partial_y\phi)\big]|_\Sigma,\\ &= \big[\partial_y\partial_i\phi - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x\partial_i\phi\big]|_\Sigma + \partial_i\eta\big[\partial_y^2\phi - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x\partial_y\phi\big]|_\Sigma.\end{aligned}$$

On en déduit que

eq:zeta2 (7.19)
$$\begin{aligned}(\partial_t + V\cdot\nabla_x)\zeta_i &= \big[\partial_y\partial_i\phi - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x\partial_i\phi\big]|_\Sigma + \partial_i\eta\big[\partial_y^2\phi - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x\partial_y\phi\big]|_\Sigma,\\ &= \big[(\partial_y - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x)\partial_i\phi\big]|_\Sigma + \partial_i\eta\big[(\partial_y - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x)\partial_y\phi\big]|_\Sigma,\\ &:= F_i + \zeta_i H.\end{aligned} \tag{7.19}$$

Soit $\theta_i, i = 1\dots, d$ et $\theta$ les solutions variationnelles des problèmes

$$\Delta_{x,y}\theta_i = 0,\quad \theta_i|_\Sigma = V_i,\qquad \Delta_{x,y}\theta = 0,\quad \theta|_\Sigma = B.$$

Alors
$$G(\eta)V_i = \big[(\partial_y - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x)\theta_i\big]|_\Sigma,\quad G(\eta)B = \big[(\partial_y - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x)\theta\big]|_\Sigma.$$

□

On ecrit

eq:zeta3 (7.20)
$$\begin{aligned}&F_i = G(\eta)V_i + R_i,\quad R_i = (\partial_y - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x)(\partial_i\phi - \theta_i)|_\Sigma,\quad i = 1,\dots,d,\\ &H = G(\eta)B + R_{d+1},\quad R_{d+1} = (\partial_y - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x)(\partial_y\phi - \theta)|_\Sigma\end{aligned} \tag{7.20}$$

et, compte tenu de (7.19), il suffit de montrer que les $R_i, i = 1,\dots,d+1$ vérifient (7.14). La preuve est identique à celle du Lemme 7.2. On pose $\Theta_i = \theta_i - \partial_i\phi, U_i = (\partial_y - \nabla_x\eta\cdot\nabla_x)\Theta_i$ et on applique le Théorème 4.18. On obtient pour $R_i$ la même estimation que pour $\gamma$ dans le Lemme 7.2.

## 7.2 Estimation du coefficient de Taylor

Dans ce paragraphe, on prouve quelques estimations du coefficient de Taylor.

prop:ma **Proposition 7.4.** *Soit $d \geq 1$ et $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathcal{F}\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $t \in [0,T]$,*

esti:a1 (7.21)
$$\begin{aligned}\|\mathfrak{a}(t) - g\|_{H^{s-\frac12}} \leq \mathcal{F}\big(&\|(\eta,\psi,V,B)(t)\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)\\ &\|(\eta,\psi,V,B)(t)\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^{s}\times H^{s}}.\end{aligned} \tag{7.21}$$

*Pour $0 < \varepsilon < s - 1 - d/2$, il existe $\mathcal{F}$ croissante telle que pour tout $t \in [0,T]$,*

esti:a2 (7.22)
$$\begin{aligned}\|(\partial_t\mathfrak{a} + V\cdot\nabla\mathfrak{a})(t)\|_{C^\varepsilon_*} \leq \mathcal{F}\big(&\|(\eta,\psi,V,B)(t)\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)\\ &\|(\eta,\psi,V,B)(t)\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^{s}\times H^{s}}.\end{aligned} \tag{7.22}$$

## 7.3 Paralinéarisation du système (7.11), (7.12), (7.13)

On introduit la "bonne inconnue d'Alinhac". On pose

bonneinc (7.23)
$$U := V + T_{\nabla_x\eta}B = V + T_\zeta B \tag{7.23}$$

puis, pour $s \in \mathbf{R}$,

bonneincs (7.24)
$$U_s = \langle D\rangle^s V + T_\zeta\langle D\rangle^s B,\qquad \zeta_s = \langle D\rangle^s\zeta. \tag{7.24}$$

para1 **Proposition 7.5.** *Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

$$(\partial_t + V \cdot \nabla_x) U_s + T_{\mathfrak{a}} \zeta_s = f_1 \tag{7.25}$$

$$(\partial_t + V \cdot \nabla_x) \zeta_s - T_\lambda U_s = f_2. \tag{7.26}$$

*où $\mathfrak{a}$ est le coefficient de Taylor, $\lambda$ a été introduit dans (4.28) et pour tout $t \in [0,T]$*

est:f1f2
$$\begin{aligned} \left\|(f_1(t), f_2(t))\right\|_{L^2(\mathbf{R}^d)\times H^{-\frac12}(\mathbf{R}^d)} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta(t),V(t),B(t))\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)& \\ \big(1 + \|V(t)\|_{H^s} + \|\eta(t)\|_{H^{s+\frac12}} + \|B(t)\|_{H^s}\big)& \end{aligned} \tag{7.27}$$

Etape 1: paralinéarisation de (7.12).

para2 **Lemme 7.6.** *On a*

est:para2
$$(\partial_t + T_V \cdot \nabla_x) V + T_{\mathfrak{a}} \zeta + T_\zeta (\partial_t + T_V \cdot \nabla_x) B = h_1 \tag{7.28}$$

*où, pour tout $t \in [0,T]$*

$$\|h_1(t)\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \leq \mathcal{F}\big(\|(\eta(t),V(t),B(t))\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)\big(1+\|V(t)\|_{H^s}+\|\eta(t)\|_{H^{s+\frac12}}+\|B(t)\|_{H^s}\big)$$

*où $H^\sigma = H^\sigma(\mathbf{R}^d)$.*

*Démonstration.* Les estimations se faisant à $t$ fixé nous l'omettrons dans ce qui suit. Soit $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. En utilisant le Théorème 10.11 avec $\sigma_0 = s, \sigma_1 = s, \sigma_2 = s_0 - 1, a = V, u = \nabla_x V$ on obtient

V-TV1
$$\|V \cdot \nabla_x V - T_V \cdot \nabla_x V\|_{H^s} \leq C \|V\|_{H^{s_0}} \|V\|_{H^s}. \tag{7.29}$$

De même

V-TV2
$$\|T_\zeta (V \cdot \nabla_x B - T_V \cdot \nabla_x B)\|_{H^s} \leq C \|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}} \|V\|_{H^{s_0}} \|B\|_{H^s}. \tag{7.30}$$

Ensuite on écrit $(\mathfrak{a} - g)\zeta = T_{\mathfrak{a}-g}\zeta + T_\zeta(\mathfrak{a} - g) + R(\zeta, \mathfrak{a} - g)$, d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\zeta &= T_{\mathfrak{a}}\zeta + g\zeta - T_g\zeta + T_\zeta(\mathfrak{a} - g) + R(\zeta, \mathfrak{a} - g) \\ &= T_{\mathfrak{a}}\zeta + T_\zeta(\mathfrak{a} - g) + (I - \psi(D))\zeta + R(\zeta, \mathfrak{a} - g) \end{aligned}$$

où $\psi \in C^\infty, \psi(\xi) = 1$ si $|\xi| \geq 2$. On se propose de montrer que

est:Rzeta
$$\|(I - \psi(D))\zeta\|_{H^s} \leq C \|\eta\|_{H^{s+\frac12}}, \quad \|R(\zeta, \mathfrak{a} - g)\|_{H^s} \leq C \|\zeta\|_{H^{s_0-\frac12}} \|a - g\|_{H^{s-\frac12}}. \tag{7.31}$$

Admettons ceci un instant, alors le lemme résulte de (7.29), (7.30), du Théorème ??? , du fait que $(\partial_t + V \cdot \nabla_x)B = \mathfrak{a} - g$ et de (7.31).

La première inégalité de (7.31) est évidente. Pour la deuxième on écrit

$$R(\zeta, \mathfrak{a} - g) = \sum_{j \geq -1} \sum_{|j-k| \leq 2} (\Delta_j \zeta)(\Delta_k(\mathfrak{a} - g)) \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} \|(\Delta_k\zeta)(\Delta_j(\mathfrak{a} - g))\|_{L^2} \leq \|\Delta_k\zeta\|_{L^\infty} \|\Delta_j(\mathfrak{a} - g)\|_{L^2} &\leq C 2^{-\frac{j}{2}} \|\zeta\|_{C^{\frac12}_*} c_j 2^{-j(s-\frac12)} \|\mathfrak{a} - g\|_{H^{s-\frac12}} \\ &\leq C' c_j 2^{-js} \|\zeta\|_{H^{s_0-\frac12}} \|\mathfrak{a} - g\|_{H^{s-\frac12}}. \end{aligned}$$

Etape 2: on commute $\langle D_x\rangle^s$ à l'équation (7.28). Le calcul symbolique paradifférentiel montre que

commut
$$
\begin{aligned}
\|[T_{\mathfrak{a}}, \langle D_x\rangle^s]\|_{H^{s-\frac12}\to L^2} &\le C\|\mathfrak{a}\|_{W^{\frac12,\infty}} \le C'(\|\mathfrak{a}-g\|_{W^{\frac12,\infty}} + g)\\
\|[T_\zeta, \langle D_x\rangle^s]\|_{H^{s-\frac12}\to L^2} &\le C(\|\zeta\|_{W^{\frac12,\infty}}\\
\|[T_V\cdot\nabla_x, \langle D_x\rangle^s]\|_{H^s\to L^2} &\le C\|V\|_{W^{1,\infty}}.
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

Comme $s > 1+\frac{d}{2}$ l'injection de Sobolev et l'estimation du coefficient de Taylor impliquent que

$$
\begin{gathered}
\big(\partial_t + T_V\cdot\nabla_x\big)\langle D_x\rangle^s V + T_{\mathfrak{a}}\langle D_x\rangle^s\zeta + T_\zeta\big(\partial_t + T_V\cdot\nabla_x\big)\langle D_x\rangle^s B = h_2, \quad \text{où}\\
\|h_2\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \le \mathcal{F}\big(\|(\eta,V,B))\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)\big(1+\|V\|_{H^s}+\|\eta\|_{H^{s+\frac12}}+\|B\|_{H^s}\big)
\end{gathered}
$$

D'autre part le Lemme 10.22 implique que

$$
\|[T_\zeta, \partial_t + T_V\cdot\nabla_x]\langle D_x\rangle^s B\|_{L^2} \le \mathcal{F}\big(\|(\eta,V,B))\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)\big(1+\|V\|_{H^s}+\|\eta\|_{H^{s+\frac12}}+\|B\|_{H^s}\big).
$$

En effet, d'après (7.18) on a

$$
\|\partial_t\zeta + V\cdot\nabla_x\zeta\|_{L^\infty} \le \|\nabla_x B\|_{L^\infty} + C\|\zeta\|_{L^\infty}\|\nabla_x V\|_{L^\infty} \le \mathcal{F}\big(\|(\eta,V,B)\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)
$$

puisque $s_0 > 1+\frac{d}{2}$. $\square$

On en déduit que

$$
\big(\partial_t + T_V\cdot\nabla_x\big)\big(\langle D_x\rangle^s V + T_\zeta\langle D_x\rangle^s B\big) + T_{\mathfrak{a}}\langle D_x\rangle^s\zeta = f_1
$$

où $f_1$ vérifie (7.27).

Etape 3: paralinéarisation de l'équation (7.13).

En appliquant le Théorème 10.11 avec $\sigma_0 = s-\frac12, \sigma_1 = s, \sigma_2 = s_0-\frac32, a = V, u = \nabla_x\zeta$ (ce qui est possible puisque $s_0 > 1+\frac{d}{2}$) il vient

$$
\|(V - T_V)\cdot\nabla_x\zeta\|_{H^{s-\frac12}} \le C\|V\|_{H^s}\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}}.
$$

Pour paralinéariser la quantité $A = G(\eta)V + \zeta G(\eta)B$ on utilise les résultats de la section 4. On a

$$
G(\eta)V = T_\lambda V + R(\eta)V, \quad G(\eta)B = T_\lambda B + R(\eta)B,
$$

de sorte que l'on peut écrire

$$
\begin{aligned}
A &= T_\lambda V + \zeta T_\lambda B + R(\eta)V + \zeta R(\eta)B = T_\lambda V + T_\zeta T_\lambda B + (\zeta - T_\zeta)T_\lambda B + R(\eta)V + \zeta R(\eta)B\\
&= T_\lambda U + [T_\zeta, T_\lambda]B + (\zeta - T_\zeta)T_\lambda B + R(\eta)V + \zeta R(\eta)B
\end{aligned}
$$

puisque $U = V + T_\zeta B$, (cf. (8.6)). D'après le "calcul symbolique" on a

$$
\|[T_\zeta, T_\lambda]B\|_{H^{s-\frac12}} \le C\big\{M_0^0(\zeta)M_{\frac12}^1(\lambda) + M_0^1(\lambda)M_{\frac12}^0(\zeta)\}\|B\|_{H^s}.
$$

Comme $M_0^{\frac12}(\zeta) + M^1_{\frac12}(\lambda) \le \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})$ on obtient

$$\|[T_\zeta, T_\lambda]B\|_{H^{s-\frac12}} \le \mathcal{F}(\|(\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\|B\|_{H^s}.$$

Ensuite en utilisant le Théorème 4.14 avec $t = s - \frac12$, on peut écrire

$$\|R(\eta)V\|_{H^{s-\frac12}} + \|R(\eta)B\|_{H^{s-\frac12}} \le \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})(\|V\|_{H^s} + \|B\|_{H^s}).$$

Ensuite, comme $s_0 - 1 > \frac{d}{2}$ on a

$$\|\zeta R(\eta)B\|_{H^{s-\frac12}} \le C(\|\zeta\|_{H^{s_0-1}}\|R(\eta)B\|_{H^{s-\frac12}} + \|\zeta\|_{H^{s-\frac12}}\|R(\eta)B\|_{H^{s_0-1}})$$

de sorte que

$$\|\zeta R(\eta)B\|_{H^{s-\frac12}} \le \mathcal{F}(\|(\eta,B)\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}})(\|\eta\|_{H^{s+\frac12}} + \|B\|_{H^s}).$$

Enfin en utilisant le Théorème 10.11 avec $s_0 = s - \frac12, s_1 = s - \frac12, s_2 = s_0$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\|(\zeta - T_\zeta)T_\lambda B\|_{H^{s-\frac12}} &\le C\|\zeta\|_{H^{s-\frac12}}\|T_\lambda B\|_{H^{s_0}} \le C'\|\eta\|_{H^{s+\frac12}}M_0^1(\lambda)\|B\|_{H^{s_0}}\\ &\le \mathcal{F}\|(\eta,B)\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}})\|\eta\|_{H^{s+\frac12}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $A = T_\lambda U + R_1$ avec

$$\|R_1\|_{H^{s-\frac12}} \le \mathcal{F}\big(\|(\eta,V,B))\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big)\big(1 + \|V\|_{H^s} + \|\eta\|_{H^{s+\frac12}} + \|B\|_{H^s}\big)$$

et il résulte de (7.13) que

$$\big(\partial_t + T_V\cdot\nabla_x\big)\zeta = T_\lambda U + R_2$$

où $R_2$ vérifie la même estimation que $R_1$ ci-dessus. Enfin en commutant cette équation avec $\langle D_x\rangle^s$ on obtient la seconde équation de la Proposition 7.5.

## 7.4 Symetrisation des équations

**Proposition 7.7.** *On introduit les symboles*

$$\gamma = \sqrt{\mathfrak{a}\lambda}, \quad q = \sqrt{\frac{\mathfrak{a}}{\lambda}}$$

*et on pose $\theta_s = T_q\zeta_s$. Alors*

eq:Us
$$\partial_t U_s + T_V\cdot\nabla_x U_s + T_\gamma\theta_s = F_1 \tag{7.33}$$
eq:thetas
$$\partial_t\theta_s + T_V\cdot\nabla_x\theta_s - T_\gamma U_s = F_2, \tag{7.34}$$

*où les termes sources $F_1, F_2$ vérifient*

est:Fj
$$\|(F_1(t),F_2(t)\|_{L^2\times L^2} \le \mathcal{F}\big(\|(\eta(t),V(t),B(t))\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}\big) \tag{7.35}$$
$$\cdot\big(\|\eta(t)\|_{H^{s+\frac12}} + \|V(t)\|_{H^s} + \|B(t)\|_{H^s}\big). \tag{7.36}$$

*pour tout $t\in[0,T]$ (où $H^\sigma = H^\sigma(\mathbf{R}^d)$).*

*Proof.* Les estimations se font à $t$ fixé. On utilise la Proposition 7.5. On obtient les équations ci-dessus avec

$$F_1 := f_1 + (T_\gamma T_q - T_{\mathfrak{a}})\zeta_s$$
$$F_2 := T_q f_2 + (T_q T_\lambda - T_\gamma)U_s - [T_q, \partial_t + T_V \cdot \nabla_x]\zeta_s.$$

Le terme $\|f_1\|_{L^2}$ est estimé dans la Proposition 7.5. Ensuite $\gamma$ est un symbole d'ordre $\frac{1}{2}$, de régularité $C_*^{\frac{1}{2}}$ car $\nabla_x \eta \in H^{s_0 - \frac{1}{2}} \subset C_*^{\frac{1}{2}}$. De même $q$ est d'ordre $-\frac{1}{2}$ de régularité $C_*^{\frac{1}{2}}$. Comme $\gamma q = \mathfrak{a}$, le calcul symbolique montre que $T_\gamma T_q - T_{\mathfrak{a}}$ est d'ordre $-\frac{1}{2}$ et que

$$\|(T_\gamma T_q - T_{\mathfrak{a}})\zeta_s\|_{L^2} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}.$$

Un raisonnement analogue montre que

$$\|(T_q T_\lambda - T_\gamma)U_s\|_{L^2} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|U_s\|_{L^2}.$$

Comme $U_s = \langle D_x\rangle^s V + T_\zeta \langle D_x\rangle^s B$ on obtient

$$\|(T_q T_\lambda - T_\gamma)U_s\|_{L^2} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})(\|V\|_{H^s} + \|B\|_{H^s}).$$

Ensuite on a

$$\|T_q f_2\|_{L^2} \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})\|f_2\|_{H^{-\frac{1}{2}}}$$

et on utilise la Proposition 7.5.

Finalement, pour estimer le commutateur on utilise le Lemme 10.22. Il vient

$$\|[T_q, \partial_t + T_V \cdot \nabla_x]\zeta_s\|_{L^2} \leq K\big\{\mathcal{M}_0^{-\frac{1}{2}}(q)\|V\|_{C_*^{1+\varepsilon}} + \mathcal{M}_0^{-\frac{1}{2}}(\partial_t q + V \cdot \nabla_x q)\big\}\|\zeta_s\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \tag{7.37}$$

Comme $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$ on a les estimations

$$\|V\|_{C_*^{1+\varepsilon}} \leq C\|V\|_{H^{s_0}}, \quad \mathcal{M}_0^{-\frac{1}{2}}(q) \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}), \quad \|\zeta_s\|_{H^{-\frac{1}{2}}} \leq \|\eta\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}.$$

Pour conclure il reste à estimer la quantité $\mathcal{M}_0^{-\frac{1}{2}}(\partial_t q + V \cdot \nabla_x q)$. Rappelons que $q = a^{\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{1}{2}}$ avec $\lambda = \big((1+|\nabla_x\eta|^2)|\xi|^2 - (\xi\cdot\nabla_x\eta)^2\big)^{\frac{1}{2}} \geq |\xi|$, que $\partial_t\eta + V\cdot\nabla_x\eta = B$ et que $\mathfrak{a} \geq c > 0$ . Un calcul simple montre alors que

$$|\partial_t q + V\cdot\nabla_x q| \leq C\mathfrak{a}^{-\frac{1}{2}}|\xi|^{-\frac{1}{2}}\big(|\partial_t\mathfrak{a} + V\cdot\nabla_x\mathfrak{a}| + |\nabla_x\eta||\nabla_x B| + |\nabla_x\eta|^2|\nabla_x V|\big)$$

D'où l'on déduit que

$$\mathcal{M}_0^{-\frac{1}{2}}(\partial_t q + V\cdot\nabla_x q) \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}})(\|V\|_{H^s} + \|B\|_{H^s}),$$

ce qui termine la preuve de la Proposition. $\square$

## 7.5 Estimations a priori de $U_s, \theta_s$.

On rappelle les notations suivantes.

Ms(T)1 (7.38)
$$\begin{aligned} M_s(T) &:= \sup_{t\in[0,T]} \|(\eta(t),\psi(t),B(t),V(t))\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^s\times H^s}, \quad T>0,\\ M_{s,0} &:= \|(\eta(0),\psi(0),B(0),V(0))\|_{H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^s\times H^s}. \end{aligned}$$

On se propose de montrer le résultat suivant.

Us-thetas **Proposition 7.8.** *Soit $s_0 > 1+\frac{d}{2}$. Pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*
(7.39)
$$\|U_s(t)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \|\theta_s(t)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} \leq \big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac12}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac12}M_s(T)).$$

*Démonstration.* Multipliant (7.33) par $U_s$ et (7.34) par $\theta_s$ et intégrant en espace on obtient

dtUs (7.40)
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\big\{\|U_s(t)\|_{L^2}^2 + \|\theta_s(t)\|_{L^2}^2\big\} + (I) + (II) = (III), \quad \text{où}\\ (I) := \big\langle T_{V(t)}\cdot\nabla_x U_s(t), U_s(t)\big\rangle + \big\langle T_{V(t)}\cdot\nabla_x\theta_s(t),\theta_s(t)\big\rangle,\\ (II) := \big\langle T_{\gamma(t)}\theta_s(t),U_s(t)\big\rangle - \big\langle T_{\gamma(t)}U_s(t),\theta_s(t)\big\rangle,\\ (III) := \big\langle F_1(t),U_s(t)\big\rangle + \big\langle F_2(t),\theta_s(t)\big\rangle. \end{cases}$$

On a $\big\langle T_{V_j(t)}\partial_j U_s(t), U_s(t)\big\rangle = -\big\langle U_s(t), (T_{V_j(t)})^*\cdot\partial_j U_s(t),\big\rangle - \big\langle T_{\partial_j V_j(t)}U_s(t),U_s(t)\big\rangle$. Ensuite

$$|\big\langle T_{\partial_j V_j(t)}U_s(t),U_s(t)\big\rangle| \leq C\|V_j(t)\|_{W^{1,\infty}}\|U_s(t)\|_{L^2}.$$

D'autre part, d'après le calcul symbolique, l'opérateur $T_{V_j(t)} - (T_{V_j(t)})^*$ est d'ordre $-1$ et sa norme est bornée par $C\|V_j(t)\|_{W^{1,\infty}} \leq C\|V_j(t)\|_{H^{s_0}}$. On en déduit que

est:I (7.41)
$$|(I)| \leq C\|V(t)\|_{H^{s_0}}\big(\|U_s(t)\|_{L^2} + \|\theta_s(t)\|_{L^2}\big).$$

De même, comme $\gamma(t) \in \Gamma^{\frac12}_{\frac12}$, le calcul symbolique montre que l'opérateur $T_{\gamma(t)} - (T_{\gamma(t)})^*$ opère de $L^2$ dans $L^2$ et que sa norme est bornée par $CM^{\frac12}_{\frac12}(\gamma(t))$ et donc par $\mathcal{F}(\|\nabla_x\eta\|_{W^{\frac12,\infty}})$ et finalement par $\mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})$. Alors

est:II (7.42)
$$|(II)| \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{H^{s_0+\frac12}})\big(\|U_s(t)\|_{L^2} + \|\theta_s(t)\|_{L^2}\big).$$

Posant $\Phi(t) = (\|U_s(t)\|_{L^2}^2 + \|\theta_s(t)\|_{L^2}^2)^{\frac12}$, il résulte de (7.40), (7.41), (7.42) et (7.35) que pour $0 \leq t \leq T$ on a $\frac{d}{dt}\Phi(t)^2 \leq \mathcal{F}(M_{s_0}(T))M_s(T)\Phi(t)$ de sorte que $\Phi(t) \leq \Phi(0) + \frac12 T\mathcal{F}(M_{s_0}(T))M_s(T)$. Comme $U_s = \langle D\rangle^s V + T_\zeta\langle D\rangle^s B$ et $\theta_s = T_q\langle D\rangle^s\zeta$ on a $\Phi(0) \leq \mathcal{F}(M_{s_0,0})M_{s,0}$, ce qui prouve la proposition. □

### 7.6 Estimations des inconnues originales

Dans ce paragraphe nous allons montrer que les estimations obtenues sur $U_s, \theta_s$ permettent d'en déduire des estimations sur $\eta, \psi, V, B$ dans $L^\infty([0,T], H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12}\times H^s\times H^s)$. Rappelons que

$$U_s = \langle D\rangle^s V + T_{\nabla\eta}\langle D\rangle^s B, \quad \theta_s = T_{\sqrt{\frac{a}{\lambda}}}\langle D\rangle^s \nabla_x\eta.$$

La preuve se fera en quatre étapes.

$(i)$ On commence par démontrer des estimations de $(\eta, V, B)$ et du coefficient de Taylor $\mathfrak{a}$ dans des normes Sobolev plus faibles.

$(ii)$ Utilisant l'estimation obtenue sur $\theta_s$ on montre comment en déduire une estimation de $\eta$ dans $L^\infty([0,T], H^{s+\frac12})$.

$(iii)$ Ensuite utilisant l'estimation obtenue sur $U_s$ on estime $(V,B)$ dans $L^\infty([0,T], H^s\times H^s)$. Dans cette étape on utilisera de manière essentielle le fait que l'on peut paralinéariser l'opérateur de Dirichlet Neumann dans un domaine à frontière de classe $H^\mu$ pour $\mu > 1+\frac{d}{2}$.

$(iv)$ Enfin l'estimation de $\psi$ découlera de celles obtenues sur $(\eta, V, B)$.

**Lemme 7.9.** *Soit $s_0 > 1+\frac{d}{2}$. Pour tout $s\geq s_0$ il existe $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ croissante telle que*

est:etaVB (7.43)

$$\|\eta\|_{L^\infty([0,T],H^s)} + \|(V,B)\|_{L^\infty([0,T],H^{s-\frac12}\times H^{s-\frac12})} \leq \big\{\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac12}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big\}(M_{s,0}+T^{\frac12}M_s(T))$$

*et pour tout $0<\varepsilon<s-1-\frac{d}{2}$*

est:a
$$\|\mathfrak{a}\|_{L^\infty([0,T],C^\varepsilon_*)} \leq \big\{\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac12}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big\}(M_{s,0}+T^{\frac12}M_s(T)). \tag{7.44}$$

*Démonstration.* On déduit de (7.11), (7.12) et (7.15) que

$$\partial\eta + V\cdot\nabla_x\eta = F_1, \quad \partial V + V\cdot\nabla_x V = F_2, \quad \partial B + V\cdot\nabla_x B = F_3$$

où $F_1 = B, F_2 = -\mathfrak{a}\zeta, F_3 = \mathfrak{a}-g$. Utilisant (7.21) et les lois de produit on obtient

$$\|F_1(t)\|_{H^s} + \|F_2(t)\|_{H^{s-\frac12}} + \|F_3(t)\|_{H^{s-\frac12}} \leq \mathcal{F}(\|(\eta(t),V(t),B(t))\|_{H^{s_0+\frac12}\times H^{s_0}\times H^{s_0}}) \\ \|(\eta(t),V(t),B(t))\|_{H^{s+\frac12}\times H^s\times H^s}.$$

En utilisant l'estimation évidente $\|h\|_{L^1([0,T])}\leq T\|h\|_{L^\infty([0,T])}$ on en déduit

$$\|F_1\|_{L^1([0,T],H^s)} + \|F_2\|_{L^1([0,T],H^{s-\frac12})} + \|F_3\|_{L^1([0,T],H^{s-\frac12})} \leq T^{\frac12}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))T^{\frac12}M_s(T).$$

Alors (7.43) découle du Lemme 10.25 (Appendice) avec $\sigma = s$ et $\sigma = s-\frac12$. Montrons (10.51). Nous allons estimer la norme $L^\infty([0,T],L^\infty)$ de $\mathfrak{a}_\varepsilon = \langle D_x\rangle^\varepsilon\mathfrak{a}$. On a

$$(\partial_t + V\cdot\nabla_x)\mathfrak{a}_\varepsilon = \langle D_x\rangle^\varepsilon(\partial_t+V\cdot\nabla_x)\mathfrak{a} + [V,\langle D_x\rangle^\varepsilon]\cdot\nabla_x\mathfrak{a} := G_1+G_2.$$

En utilisant (7.22) on obtient

$$\|G_1\|_{L^1([0,T],L^\infty)} \leq T\mathcal{F}(M_{s_0}(T))M_s(T).$$

D'autre part d'après le Lemme 10.26 on a

$$\|[V,\langle D_x\rangle^\varepsilon]\cdot\nabla_x f\|_{L^\infty}\le C\|V\|_{H^{s_0}}\|f\|_{C^\varepsilon_*}.$$

En utilisant le fait que $\nabla_x\mathfrak{a}=\nabla_x(\mathfrak{a}-g)$ et la Proposition 7.4 on obtient

$$\begin{aligned}\|G_2\|_{L^1([0,T],L^\infty)}&\le C\int_0^T\|V(t)\|_{H^s}\|\mathfrak{a}(t)-g\|_{C^\varepsilon_*}\,dt\le C'\int_0^T\|V(t)\|_{H^{s_0}}\|\mathfrak{a}(t)-g\|_{H^{s-\frac12}}\,dt\\&\le T\mathcal{F}(M_{s_0}(T))M_s(T).\end{aligned}$$

Il suffit alors d'utiliser le Lemme 10.25 pour en déduire 10.51. $\square$

est:eta1 **Lemme 7.10.** *Soit $s_0>1+\frac d2$. Pour tout $s\ge s_0$ il existe $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ croissante telle que*

est:etaVB1
$$\|\eta\|_{L^\infty([0,T],H^{s+\frac12})}\le\big\{\mathcal{F}(M_{s_0,0})+T^{\frac12}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big\}(M_{s,0}+T^{\frac12}M_s(T)).\tag{7.45}$$

*Démonstration.* Choisissons $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbf{N}$ tels que

$$0<\varepsilon<s-1-\frac d2,\quad (N+1)\varepsilon>\frac12.$$

Posons $R=I-T_{\frac1q}T_q$, d'où $(I-R)\zeta_s=T_{\frac1q}T_q\zeta_s$; rappelons que $\zeta_s=\langle D_x\rangle^s\zeta,\zeta=\nabla_x\eta$. Alors

$$\zeta_s=(I+R+\ldots+R^N)T_{\frac1q}T_q\zeta_s+R^{N+1}\zeta_s.$$

Comme $q=\sqrt{\frac{\mathfrak{a}}{\lambda}}$ le calcul symbolique montre que pour tout $\mu\in\mathbf{R}$ il existe $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ non décroisssante, ne dépendant que de $\varepsilon$ et $\inf_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d}\mathfrak{a}$ telle que

$$\|R(t)\|_{H^\mu\to H^{\mu+\varepsilon}}\le\mathcal{F}\big(\|\mathfrak{a}(t)\|_{C^\varepsilon_*}+\|\eta(t)\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\big)$$

et

$$\|T_{\frac{1}{q(t)}}\|_{H^{\mu+\frac12}\to H^\mu}\le\mathcal{F}\big(\|\mathfrak{a}(t)\|_{L^\infty}+\|\eta(t)\|_{W^{1,\infty}}\big).$$

On en déduit que pour $0\le j\le N+1$

$$\|R(t)^jv\|_{H^\mu}\le\mathcal{F}_j\big(\|\mathfrak{a}(t)\|_{C^\varepsilon_*}+\|\eta(t)\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\big)\|v\|_{H^{\mu-j\varepsilon}}.$$

Par conséquent, prenant $\mu=-\frac12$, il vient compte tenu du choix de $N$

$$\begin{aligned}\|\nabla_x\eta\|_{H^{s-\frac12}}=\|\zeta_s\|_{H^{-\frac12}}&\le\mathcal{F}\big(\|\mathfrak{a}(t)\|_{L^\infty}+\|\eta(t)\|_{C^\varepsilon_*}\big)\big(\|T_{\frac{1}{q(t)}}T_{q(t)}\zeta_s\|_{H^{-\frac12}}+\|\zeta_s\|_{H^{-\frac12-(N+1)\varepsilon}}\big)\\&\le\mathcal{F}\big(\|\mathfrak{a}(t)\|_{C^\varepsilon_*}+\|\eta(t)\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\big)\big(\|T_{q(t)}\zeta_s\|_{L^2}+\|\zeta_s\|_{H^{-1}}\big).\end{aligned}$$

D'après la Proposition 7.8 on a ($T_q\zeta_s=\theta_s$)

$$\|T_q\zeta_s\|_{L^\infty([0,T],L^2)}\le\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0})+T^{\frac12}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0}+T^{\frac12}M_s(T))..$$

Ensuite d'après le Lemme ??? et les injections de Sobolev on a

$$\|\mathfrak{a}\|_{L^\infty([0,T],C^\varepsilon_*)}+\|\eta\|_{L^\infty([0,T],C^{1+\varepsilon}_*)}\|+\|\zeta_s\|_{L^\infty([0,T],H^{-1})}\le\mathcal{F}(M_{s_0,0})+T\mathcal{F}(M_{s_0}(T)$$

d'où finalement

$$\|\nabla_x\eta\|_{H^{s-\frac12}}\le\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0})+T^{\frac12}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0}+T^{\frac12}M_s(T)).,$$

ce qui joint à (7.43) prouve le lemme. $\square$

est:etaVB2 **Lemme 7.11.** *Soit $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Pour tout $s \geq s_0$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

$$\|(V,B)\|_{L^\infty([0,T],H^s\times H^s)} \leq \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}}M_s(T)).$$

*Démonstration.* Posons $I = [0,T]$. Rappelons que $U = V + T_\zeta B$. On prouve tout d'abord que

est:U1
$$\|U\|_{L^\infty(I,H^s)} \leq \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}}M_s(T)). \tag{7.46}$$

Pour cela on écrit $\langle D_x\rangle^s U = U_s + [\langle D_x\rangle^s, T_\zeta]B$. Ensuite d'après le calcul symbolique on a, à $t$ fixé et puisque $s > 1 + \frac{d}{2}$,

$$\|[\langle D_x\rangle^s, T_\zeta]B(t)\|_{L^2} \leq C\|\zeta(t)\|_{C_*^{\frac{1}{2}}}\|B(t)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}} \leq C'\|\eta(t)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\|B(t)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que

$$\|U\|_{L^\infty(I,H^s)} \leq C\big(\|U_s\|_{L^\infty(I,L^2)} + \|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s_0+\frac{1}{2}})}\|B\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}\big)$$

et on utilise la Proposition 7.8, (7.43) et (7.45) pour conclure. Ensuite prenons la divergence des deux membres de l'égalité $U = V + T_\zeta B$. En utilisant le Lemme 7.2 et (4.35), il vient

$$\begin{aligned}\text{div } U &= \text{div } V + T_{\text{div } \zeta}B + T_\zeta \cdot \nabla_x B = -G(\eta)B + T_{i\zeta\cdot\xi + \text{div } \zeta}B + \gamma\\ &= -T_\lambda B - R(\eta)B + T_{i\zeta\cdot\xi+\text{div}\zeta}B + \gamma = T_p B - R(\eta)B + T_{\text{div}\zeta}B + \gamma,\end{aligned}$$

où $p := -\lambda + i\zeta\cdot\xi$. D'après les Lemmes 7.2, 7.10 et 7.11 on a

est:gamma1
$$\|\gamma\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})} \leq \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}}M_s(T)). \tag{7.47}$$

Notons que $|p|^2 = \lambda^2 + (\nabla_x\eta\cdot\xi)^2 = (1+|\nabla_x\eta|^2)|\xi|^2 \geq |\xi|^2$.

On écrit alors $B = T_{\frac{1}{p}}T_p B + \big(I - T_{\frac{1}{p}}T_p\big)B$. Comme $T_pB = \text{div}U + R(\eta)B - T_{\text{div}\zeta}B - \gamma$ il vient

def:S
$$B = T_{\frac{1}{p}}\text{div}U - T_{\frac{1}{p}}\gamma + SB \quad \text{où} \quad S = T_{\frac{1}{p}}\big(-T_{\text{div}\zeta} + R(\eta)\big) + \big(I - T_{\frac{1}{p}}T_p\big). \tag{7.48}$$

Nous allons prouver que

"$S$ est un opérateur d'ordre $-\dfrac{1}{2}$ dont les seminormes sont bornées par $\mathcal{F}(\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s_0+\frac{1}{2}})})$".

En effet comme $\nabla_x\eta \in H^{s_0-\frac{1}{2}} \subset C_*^{\frac{1}{2}}$, on a $p \in \Gamma^1_{\frac{1}{2}}$. On en déduit que $\frac{1}{p} \in \Gamma^{-1}_{\frac{1}{2}}$ avec $M^{-1}_{\frac{1}{2}}(p^{-1}) \leq \mathcal{F}(\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s_0+\frac{1}{2}})})$. Ensuite on a $\text{div}\zeta = \Delta_x\eta \in H^{s_0-\frac{3}{2}}$ de sorte que le Théorème **??** avec $\alpha = \mu - \frac{1}{2}, \beta = s - \frac{3}{2}$ on a (à $t$ fixé)

$$\|T_{\text{div}\zeta}u(t)\|_{H^{\mu-\frac{1}{2}}} \leq C\|\eta(t)\|_{H^{s_0+\frac{1}{2}}}\|u(t)\|_{H^\mu}$$

i.e. $T_{\mathrm{div}\zeta}$ est un opérateur d'ordre $\frac{1}{2}$. Ensuite le Théorème 4.17 (cas 1) montre que l'opérateur $R(\eta)$ est également d'ordre $\frac{1}{2}$ avec des seminormes majorées par $\mathcal{F}(\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s+\frac{1}{2}})})$. Enfin le calcul symbolique montre que l'opérateur $I - T_{\frac{1}{p}}T_p$ est d'ordre $1 - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ avec des seminormes bornées comme ci-dessus, ce qui termine la preuve de (7.48).

On déduit du Lemme 7.10 que le seminormes de $S$ sont bornées par

$$\mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}}M_s(T)).$$

D'après (7.48) on a $B = W + SB$ où $W = T_{\frac{1}{p}}\mathrm{div}\, U - T_{\frac{1}{p}}\gamma$. D'après (7.46) et (7.47), $W$ vérifie

$$\|W\|_{L^\infty(I,H^s)} \le \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}}M_s(T)).$$

Alors

$$\|B\|_{L^\infty(I,H^s)} \le \|W\|_{L^\infty(I,H^s)} + \|SB\|_{L^\infty(I,H^s)} \le \|W\|_{L^\infty(I,H^s)} + \mathcal{F}(\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s_0+\frac{1}{2}})})\|B\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}.$$

En utilisant l' estimation de la norme de $B$ dans $L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})$ donnée par (7.43) et le Lemme 7.10 on obtient

$$\|B\|_{L^\infty(I,H^s)} \le \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}}M_s(T)).$$

Enfin comme $U = V + T_\zeta B$ on déduit de ci-dessus et de (7.46) que $V$ vérifie la même estimation, ce qui termine la preuve du Lemme 7.11. □

**Lemme 7.12.** *Soit $s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. Pour tout $s \ge s_0$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

$$\|\psi\|_{L^\infty(I,H^{s+\frac{1}{2}})} \le \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s_0,0}) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_{s_0}(T))\big)(M_{s,0} + T^{\frac{1}{2}}M_s(T)).$$

*Démonstration.* Comme $\nabla_x\psi = V + B\nabla_x\eta$ et que la norme $L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})$ de $(\nabla_x\eta, V, B)$ a déjà été estimée il reste à estimer $\|\psi\|_{L^\infty(I,L^2)}$. Nous allons montrer que

equation:psi

$$(\partial_t + V\cdot\nabla_x)\psi = -g\eta + \frac{1}{2}|V|^2 + \frac{1}{2}B^2. \tag{7.49}$$

L'équation sur $\psi$ s'écrit $\partial_t\psi = -g\eta - \frac{1}{2}|\nabla_x\psi|^2 + \frac{1}{2}(1+|\nabla_x\eta|^2)B^2 = 0$. Comme $V = \nabla_x\psi - B\nabla_x\eta$ on obtient

$$\begin{aligned}(\partial_t + V\cdot\nabla_x)\psi &= \partial_t\psi + |\nabla_x\psi|^2 - B\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta \\ &= -g\eta + \frac{1}{2}|\nabla_x\psi|^2 + \frac{1}{2}(1+|\nabla_x\eta|^2)B^2 - B\nabla_x\psi\cdot\nabla_x\eta \\ &= -g\eta + \frac{1}{2}|\nabla_x\psi - B\nabla_x\eta|^2 + \frac{1}{2}B^2 = -g\eta + \frac{1}{2}|V|^2 + \frac{1}{2}B^2.\end{aligned}$$

On utilise alors l'inégalité (10.44) de la Proposition 10.25 avec $f = -g\eta + \frac{1}{2}|V|^2 + \frac{1}{2}B^2$ en majorant la norme $L^2_x$ du membre de droite par la norme de l'espace $H^{s-1}_x$ qui est une algèbre et la norme $L^1_t$ par $T$ fois la norme $L^\infty_t$, ce qui termine la preuve du lemme. □

La démonstration du Théorème 7.1 est donc achevée.

ction:contrac

# 8 Contraction

Dans ce paragraphe on établit des estimées de contraction pour la différence de deux solutions dans des normes plus faibles que celles utilisées précédemment, ce qui est classique dans les edp quasi-linéaires. Ces estimations permettront de prouver l'unicité mais également l'existence de solutions.

theo:contrac **Théorème 8.1.** *Soit $d \geq 1, s > 1 + \frac{d}{2}$. Soit $(\eta_j, \psi_j), j = 1, 2$ deux solutions du système (2.12) sur $[0, T_0], T_0 > 0$, telles que*

$$(\eta_j, \psi_j, V_j, B_j) \in C^0([0, T_0], H^{s+\frac{1}{2}} \times H^{s+\frac{1}{2}} \times H^s \times H^s)$$

*Supposons également qu'il existe $c > 0$ telle que $\mathfrak{a}_j(t, x) \geq c$ pour tout $(t, x) \in [0, T_0] \times \mathbf{R}^d$ et $j = 1, 2$. Posons*

$$\eta := \eta_1 - \eta_2, \quad \psi = \psi_1 - \psi_2, \quad V := V_1 - V_2, \quad B = B_1 - B_2,$$

$$\mathcal{U}_j = (\eta_j, \psi_j, V_j, B_j), \quad \mathcal{U} = (\eta, \psi, V, B), \quad M_j := \sup_{t \in [0, T_0]} \|\mathcal{U}_j(t)\|_{H^{s+\frac{1}{2}} \times H^{s+\frac{1}{2}} \times H^s \times H^s}.$$

*Il existe alors une constante positive $\mathcal{K} = \mathcal{K}(M_1, M_2)$ telle que*

est:etapsiVB
$$\|\mathcal{U}\|_{L^\infty([0,T_0], H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-1} \times H^{s-1})} \leq \mathcal{K} \|\mathcal{U}|_{t=0}\|_{H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-1} \times H^{s-1}} \tag{8.1}$$

Posons

$$N(T) := \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{U}(t)\|_{H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-1} \times H^{s-1}}.$$

Le résultat ci-dessus découlera de l'estimation suivante,

est:N(T)
$$N(T) \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\big(N(0) + TN(T)\big) \tag{8.2}$$

pour une certaine fonction $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante ne dépendant que de $s$ et $d$. En effet si $T_1 \leq T_0$ est choisi tel que $T_1 \mathcal{F}(M_1 + M_2) \leq \frac{1}{2}$ on aura $N(T_1) \leq 2\mathcal{F}(M_1 + M_2)N(0)$. Itérant cette estimation sur les intervalles $[T_1, 2T_1], \dots, [T_0 - T_1, T_0]$ on déduit le Théorème.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration de (8.2).

Rappelons (cf. Proposition 7.3) que si l'on pose $\mathcal{L}_j = \partial_t + V_j \cdot \nabla_x$ on a les équations

eq:BjVjzetaj
$$\begin{cases} \mathcal{L}_j B_j = \mathfrak{a}_j - g, \\ \mathcal{L}_j V_j = -\mathfrak{a}_j \zeta_j, \quad (\zeta_j = \nabla_x \eta_j), \\ \mathcal{L}_j \zeta_j = G(\eta_j) V_j + \zeta_j G(\eta_j) B_j + R_j. \end{cases} \tag{8.3}$$

On en déduit les équations satisfaites par les différences,

eq:diff
$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 B + V \cdot \nabla_x B_2 = \mathfrak{a}, \\ \mathcal{L}_1 V + V \cdot \nabla_x V_2 = -\mathfrak{a}_2 \zeta - \mathfrak{a} \zeta_1, \\ \mathcal{L}_2 \zeta + V \cdot \nabla_x \zeta_1 = G(\eta_1) V + \zeta_1 G(\eta_1) B + \zeta G(\eta_2) B_2 + R + S \end{cases} \tag{8.4}$$

où $R = R_1 - R_2$ et

S=
$$S = [G(\eta_1) - G(\eta_2)] V_2 + \zeta_1 [G(\eta_1) - G(\eta_2)] B_2. \tag{8.5}$$

**Remarque 8.2.** On aurait envie de travailler directement sur ce système et d'appliquer les inégalités obtenues dans la Proposition 10.25 (équations de transport) . On ne peut pas le faire car les membres de droite ne sont pas au bon niveau de régularité (ce ne sont pas de bons termes sources). Par exemple on doit estimer $\zeta$ dans $H^{s-\frac{3}{2}}$ mais, dans le second membre, $G(\eta_1)B$ dans $H^{s-2}$. Il faut alors trouver une autre forme de ces équations et c'est là que la "bonne inconnue" entre en jeu.

**Lemme 8.3.** *Les différences $\zeta, V, B$ sont solutions du système*

bonneinc
$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(V+\zeta_1 B)+\mathfrak{a}_2\zeta = F_1 \\ \mathcal{L}_2\zeta - G(\eta_1)V-\zeta_1 G(\eta_1)B = F_2 \end{cases} \tag{8.6}$$

*où*

$$\|(F_1,F_2)\|_{L^\infty([0,T],H^{s-1}\times H^{s-\frac{3}{2}})} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T).$$

*Démonstration.* On commence par réecrire le système (8.4) de la manière suivante.

eq:diff1
$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 B = \mathfrak{a}+f_1, \\ \mathcal{L}_1 V = -\mathfrak{a}_2\zeta-\mathfrak{a}\zeta_1+f_2, \\ \mathcal{L}_2\zeta = G(\eta_1)V+\zeta_1 G(\eta_1)B+R+S+f_3, \end{cases} \tag{8.7}$$

où

$$f_1=-V\cdot\nabla_x B_2,\quad f_2=-V\cdot\nabla_x V_2,\quad f_3=-V\cdot\nabla_x\zeta_1+\zeta G(\eta_2)B_2.$$

D'après le Théorème 4.26 et la preuve de la Proposition 7.3 on a

est:RS
$$\|R\|_{L^\infty([0,T],H^{s-\frac{3}{2}})}+\|S\|_{L^\infty([0,T],H^{s-\frac{3}{2}})} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T). \tag{8.8}$$

Ensuite puisque $s>1+\frac{d}{2}$ $H^{s-1}$ est une algèbre, de sorte que l'on peut écrire

estf1f2
$$\begin{aligned} \|f_1(t)\|_{H^{s-1}}+\|f_2(t)\|_{H^{s-1}} &\le C\|V(t)\|_{H^{s-1}}(\|\nabla_x B_2(t)\|_{H^{s-1}}+\|\nabla_x V_2(t)\|_{H^{s-1}}), \\ &\le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T). \end{aligned} \tag{8.9}$$

Pour estimer le terme $f_3$ on utilise les Théorèmes 10.10 et 4.13. On obtient

$$\begin{aligned} \|V\cdot\nabla_x\zeta(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} &\le C\|V(t)\|_{H^{s-1}}\|\nabla_x\zeta_1(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le C(M_1)N(T), \\ \|\zeta G(\eta_2)B_2(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} &\le C\|G(\eta_2)B_2(t)\|_{H^{s-1}}\|\zeta(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}}, \\ &\le C'\mathcal{F}(\|\eta_2(t)\|_{H^{s+\frac{1}{2}}})\|B_2(t)\|_{H^s}\|\eta(t)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}, \\ &\le \mathcal{F}_1(M_2)N(T). \end{aligned}$$

par conséquent

est:f3
$$\|f_3\|_{L^\infty([0,T],H^{s-\frac{3}{2}})} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T). \tag{8.10}$$

Ensuite on a

$$\mathcal{L}_1(V+\zeta_1 B)=\mathcal{L}_1 V+\zeta_1\mathcal{L}_1 B+B\mathcal{L}_1\zeta_1,$$

de sorte qu'en utilisant (8.3) et (8.7) on obtient

$$\mathcal{L}_1(V+\zeta_1 B)+\mathfrak{a}_2\zeta = f_2+\zeta_1 f_1 + BG(\eta_1)V_1 + B\zeta_1 G(\eta_1)B_1 + BR_1 := F_1.$$

En utilisant (8.9), le Théorème 4.13 et le fait que $s>1+\frac{d}{2}$ on obtient

est:F1 (8.11)
$$\|F_1\|_{L^\infty([0,T],H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T).$$

Enfin d'après (8.7) on a $F_2 = R+S+f_3$ de sorte que l'estimation de $F_2$ dans $L^\infty([0,T],H^{s-\frac{3}{2}})$ résulte de (8.8) et (8.10). ☐

L'étape suivante consiste à symmetriser le système (8.6). Notons $I=[0,T]$.

eq:symm **Lemme 8.4.** *Posons*

$$\lambda_1 := \sqrt{(1+|\nabla_x\eta_1|^2)|\xi|^2-(\nabla_x\eta_1\cdot\xi)^2}$$

*et*

$$l := \sqrt{\lambda_1\mathfrak{a}_2}, \quad \varphi = T_{\sqrt{\lambda_1}}(V+\zeta_1 B) \quad \theta = T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}\zeta.$$

*Il existe alors $\mathcal{F}:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ croissante telle que*

symm (8.12)
$$\begin{cases}(\partial_t+T_{V_1}\cdot\nabla_x)\varphi + T_l\theta = g_1\\ (\partial_t+T_{V_2}\cdot\nabla_x)\theta - T_l\varphi = g_2\end{cases}$$

*et*

$$\|(g_1,g_2)\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}}\times H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T).$$

*Démonstration.* On part des équations (8.6) où l'on remplace $\mathcal{L}_j$ par $\partial_t + T_{V_j}\cdot\nabla_x$, $\mathfrak{a}_2$ par $T_{\mathfrak{a}_2}$ et $G(\eta_j)$ par $T_{\lambda_j}+R_j(\eta_j)$. On obtient

F'1 (8.13)
$$(\partial_t+T_{V_1}\cdot\nabla_x)(V+\zeta_1B)+T_{\mathfrak{a}_2}\zeta = F_1 + (T_{V_1}-V_1)(V+\zeta_1 B)+(T_{\mathfrak{a}_2}-\mathfrak{a}_2)\zeta := F_1'.$$

En appliquant le Théorème 10.11 avec $\sigma_0=s-1, \sigma_1=s, \sigma_2=s-1$ on obtient à $t\in I$ fixé

$$\|(T_{V_1}-V_1)(V+\zeta_1B)(t)\|_{H^{s-1}} \leq C\|V_1(t)\|_{H^s}(\|V(t)\|_{H^{s-1}}+\|\zeta_1\|_{H^{s-1}}\|B(t)\|_{H^{s-1}}) \leq \mathcal{F}(M_1)N(T).$$

En appliquant le Théorème 10.11 avec $\sigma_0=s-1, \sigma_1=s-\frac{1}{2}, \sigma_2=s-\frac{3}{2}$ on obtient

$$\|(T_{\mathfrak{a}_2}-\mathfrak{a}_2)\zeta(t)\|_{H^{s-1}} \leq C(\|\mathfrak{a}_2(t)-g\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}+1)\|\zeta(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \leq \mathcal{F}(M_2)N(T).$$

On a utilisé ici le fait que

$$(T_{\mathfrak{a}_2}-\mathfrak{a}_2)\zeta = (T_{\mathfrak{a}_2-g}-(\mathfrak{a}_2-g))\zeta+\psi(D)\zeta, \quad \psi\in S^{-\infty}.$$

On en déduit que

est:F'1 (8.14)
$$\|F_1'\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T).$$

Pour traiter la deuxième équation de (8.6) on écrit

F'2 (8.15)
$$\begin{aligned}(\partial_t+T_{V_2}\cdot\nabla_x)\zeta - T_{\lambda_1}V - T_{\zeta_1}T_{\lambda_1}B &= F_2 + (T_{V_2}-V_2)\cdot\nabla_x\zeta\\ &\quad + (G(\eta_1)-T_{\lambda_1})V + (\zeta_1 G(\eta_1)-T_{\zeta_1}T_{\lambda_1})B := F_2'.\end{aligned}$$

D'après le Théorème 10.11 avec $\sigma_0 = s - \frac{3}{2}, \sigma_1 = s, \sigma_2 = s - \frac{5}{2}$ on a

$$\|(T_{V_2} - V_2) \cdot \nabla_x \zeta(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \leq C\|V_2(t)\|_{H^s}\|\nabla_x \zeta(t)\|_{H^{s-\frac{5}{2}}} \leq \mathcal{F}(M_2)N(T).$$

Ensuite d'après le Théorème 4.17 avec $s_0 = s, t = s - \frac{3}{2}$ et on obtient

$$\|(G(\eta_1) - T_{\lambda_1})V\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} + \|(G(\eta_1) - T_{\lambda_1})B\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1)N(T).$$

Ensuite, on écrit

$$(\zeta_1 G(\eta_1) - T_{\zeta_1}T_{\lambda_1})B = (\zeta_1 - T_{\zeta_1})G(\eta_1)B + T_{\zeta_1}(G(\eta_1) - T_{\lambda_1})B.$$

On utilise le Théorème 10.11 avec $\sigma_0 = s - \frac{3}{2}, \sigma_1 = s - \frac{1}{2}, \sigma_2 = s - 2$ puis le Théorème 4.13 avec $\sigma = s - 2$. Il vient

$$\|(\zeta_1 - T_{\zeta_1})G(\eta_1)B(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \leq \|\zeta_1(t)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\mathcal{F}(\|\eta_1(t)\|_{H^{s+\frac{1}{2}}})\|B(t)\|_{H^s} \leq \mathcal{F}(M_1)N(T).$$

Enfin on utilise les Théorèmes 10.7 et 4.14 avec $s = s_0, t = s - \frac{3}{2}$ il vient

$$\|T_{\zeta_1}(G(\eta_1) - T_{\lambda_1})B(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \leq C\|\zeta_1\|_{L^\infty}\mathcal{F}(\|\eta_1(t)\|_{H^{s+\frac{1}{2}}})\|B(t)\|_{H^{s-1}} \leq \mathcal{F}_1(M_1)N(T).$$

On en déduit que

est:F'2 (8.16)
$$\|F_2'\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}_1(M_1 + M_2)N(T).$$

En résumé on a montré que

(8.17)
$$\begin{aligned}&(\partial_t + T_{V_1} \cdot \nabla_x)(V + \zeta_1 B) + T_{\mathfrak{a}_2}\zeta = F_1',\\ &(\partial_t + T_{V_2} \cdot \nabla_x)\zeta - T_{\lambda_1}V - T_{\zeta_1}T_{\lambda_1}B = F_2',\end{aligned}$$

avec

$$\|(F_1', F_2')\|_{L^\infty(I,H^{s-1}\times H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)N(T).$$

On applique $T_{\sqrt{\lambda_1}}$ à la première équation et $T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}$ à la deuxième et on utilise les estimations suivantes

(8.18)
$$\begin{aligned}&\|[T_{\sqrt{\lambda_1}}, (\partial_t + T_{V_1} \cdot \nabla_x)]\|_{H^{s-1}\to H^{s-\frac{3}{2}}}\\ &\qquad\leq \mathcal{K}(M_1)\big(\mathcal{M}_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_1}) + \mathcal{M}_0^{\frac{1}{2}}((\partial_t + V_1 \cdot \nabla_x)\sqrt{\lambda_1})\big) \leq \mathcal{K}'(M_1)\end{aligned}$$

(8.19)
$$\begin{aligned}&\|[T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}, (\partial_t + T_{V_2} \cdot \nabla_x)]\|_{H^{s-1}\to H^{s-\frac{3}{2}}}\\ &\qquad\leq \mathcal{K}(M_2)\big(\mathcal{M}_0^0(\sqrt{\mathfrak{a}_2}) + \mathcal{M}_0^0((\partial_t + V_2 \cdot \nabla_x)\sqrt{\mathfrak{a}_2})\big) \leq \mathcal{K}'(M_2),\end{aligned}$$

qui résultent du Lemme 10.22 et de (7.13) (resp. (7.22)). On obtient

syst:2 (8.20)
$$\begin{aligned}&(\partial_t + T_{V_1} \cdot \nabla)T_{\sqrt{\lambda_1}}(V + \zeta_1 B) + T_{\sqrt{\lambda_1}}T_{a_2}\zeta = G_1,\\ &(\partial_t + T_{V_2} \cdot \nabla)T_{\sqrt{a_2}}\zeta - T_{\sqrt{a_2}}\big(T_{\lambda_1}V - T_{\zeta_1}T_{\lambda_1}B\big) = G_2,\end{aligned}$$

où
$$\|(G_1,G_2)\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}}\times H^{s-\frac{3}{2}})}\le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T).$$
Ensuite, d'après le calcul symbolique, l'opérateur $\mathcal{T}=T_{\sqrt{\lambda_1}}T_{a_2}-T_{\sqrt{\lambda_1\mathfrak{a}_2}}T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}$ est d'ordre zéro avec des seminormes bornées par $\mathcal{F}(M_1+M_2)$. Alors
$$\|\mathcal{T}\zeta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})}\le \mathcal{F}(M_1+M_2)\|\zeta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})}\le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T).$$
Alors la première équation de (8.12) se déduit de la première équation de (8.20). D'autre part les opérateurs $T_{\zeta_1}T_{\lambda_1}-T_{\lambda_1\zeta_1}$ et $T_{\lambda_1}T_{\zeta_1}-T_{\lambda_1\zeta_1}$ sont d'ordre $\frac{1}{2}$ avec des seminormes bornées par $\mathcal{K}(M_1)$; il en est donc de même du commutateur $[T_{\zeta_1},T_{\lambda_1}]$. Ensuite on observe que l'opérateur $T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}T_{\lambda_1}-T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2\lambda_1}}T_{\sqrt{\lambda_1}}$ est d'ordre $\frac{1}{2}$ avec des seminormes bornées par $\mathcal{K}(M_1+M_2)$ et enfin qu'en vertu du Théorème 10.11 avec $\sigma_0=\sigma_1=s-\frac{1}{2},\sigma_2=s-1$ on a
$$\|T_{\zeta_1}B-\zeta_1B\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}\le\mathcal{K}(M_1)\|B\|_{L^\infty(I,H^{s-1})}.$$
Alors la deuxième équation de (8.12) se déduit de la deuxième équation de (8.20), ce qui termine la preuve du Lemme 8.4. $\square$

Rappelons que nous avons posé
$$\begin{cases} N(T)=\sup_{t\in I}\|(\eta,\psi,B,V)(t)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}\times H^{s-\frac{1}{2}}\times H^{s-1}\times H^{s-1}},\\ \varphi=T_{\sqrt{\lambda_1}}(V+\zeta_1 B),\qquad \theta=T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}\zeta.\end{cases}$$

est:theta-phi **Lemme 8.5.** *Introduisons*
$$\widetilde{N}(T)=\sup_{t\in I}\big\{\|\theta(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}}+\|\varphi(t)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}}\big\}.$$
*On a alors*

Ntilde (8.21)
$$\widetilde{N}(T)\le\mathcal{K}(M_1,M_2)\big(N(0)+TN(T)\big).$$

*Démonstration.* La continuité de opérateurs paradifférentiels dans les espaces de Sobolev et le fait que $H^{s-1}$ est une algèbre impliquent que
$$\widetilde{N}(0)\le\mathcal{K}(M_1,M_2)N(0)\quad \widetilde{N}(T)\le\mathcal{K}(M_1,M_2)N(T).$$
Il suffit donc de montrer que

(8.22)
$$\widetilde{N}(T)\le\mathcal{K}(M_1,M_2)\big(\widetilde{N}(0)+TN(T)+T\widetilde{N}(T)\big).$$
Pour cela on commute $\langle D_x\rangle^{s-\frac{3}{2}}$ aux équations (8.12) et on effectue une estimation $L^2$. On utilise alors le fait que
$$\|(T_{V_j}\cdot\nabla_x+T_{V_j}\cdot\nabla_x\|_{L^2\to L^2}\le C\|V\|_{W^{1,\infty}},\quad \|(T_l-(T_l)^*\|_{L^2\to L^2}\le\mathcal{F}(\|(\eta_1,\eta_2)\|_{W^{\frac{3}{2},\infty}\times W^{\frac{3}{2},\infty}}$$
et que $[T_{V_j}\cdot\nabla_x,\langle D_x\rangle^{s-\frac{3}{2}}$ est d'ordre $s-\frac{3}{2}$, de norme majorée par $C\|V\|_{W^{1,\infty}}$. $\square$

## 8.1 Estimations des inconnues originales

esti-der-eta **Proposition 8.6.** *Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

est:diff-eta (8.23)
$$\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\{N(0) + TN(T)\}$$

*Démonstration.* Des équations $\partial_t \eta_j = G(\eta_j)\psi_j$ on déduit

$$\eta(t) = \eta(0) + \int_0^t G(\eta_1)\psi(\sigma)\, d\sigma + \int_0^t \big(G(\eta_1) - G(\eta_2)\big)\psi_2(\sigma)\, d\sigma.$$

En utilisant les Théorèmes 4.16 et 4.26 il vient

est:diff-eta1 (8.24)
$$\begin{aligned}\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} &\leq \|\eta(0)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} + T\mathcal{F}(M_1 + M_2)\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}\\ &\leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)(N(0) + TN(T)).\end{aligned}$$

Ensuite comme $\theta = T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}\nabla_x \eta$ on a $T_{\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}}\theta = T_{\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}}T_{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}\nabla_x\eta = (I - R)\nabla_x \eta$ où $R$ est un opérateur d'ordre $-\frac{1}{2}$ dont les seminormes sont majorées par $\mathcal{K}(M_2)$. On déduit du lemme 8.5 que

est:diff-eta2 (8.25)
$$\begin{aligned}\|\nabla_x\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} &\leq \|T_{\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}_2}}}\theta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} + \|R\nabla_x\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})}\\ &\leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\big(N(0) + TN(T) + \mathcal{K}(M_2)\|\nabla_x\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-2})}.\end{aligned}$$

De même

$$\|\nabla_x\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-2})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\big(N(0) + TN(T) + \mathcal{K}(M_2)\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})}.$$

Le lemme découle alors de cette dernière inégalité ainsi que de (8.24) et (8.25). □

On peut maintenant estimer $B$ et $V$.

est:diff-VB **Proposition 8.7.** *Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

(8.26)
$$\|(B, V)\|_{L^\infty(I,H^{s-1}\times H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\{N(0) + TN(T)\}.$$

On commence par estimer $B$. Soit $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}_1 - \widetilde{\phi}_2$ où $\widetilde{\phi}_j$ est l'extension harmonique dans $\widetilde{\Omega}$ de la fonction $\psi_j$. Posons

$$b_2 = \frac{\partial_z \widetilde{\phi}_2}{\partial_z \rho_2}, \quad w = \widetilde{\phi} - T_{b_2}\rho.$$

Notons que $b_2|_{z=0} = B_2$, $\widetilde{\phi}|_{z=0} = \psi_1 - \psi_2 := \psi$ et donc

trace:w (8.27)
$$w|_{z=0} = \psi - T_{B_2}\eta.$$

La première étape consiste à relier $w, \rho$ et $B$.

**Lemme 8.8.** *On a*

expr:B (8.28)
$$B = \Big[\frac{1}{\partial_z \rho_1}\Big(\partial_z w - (b_2 - T_{b_2})\partial_z \rho + T_{\partial_z b_2}\rho\Big)\Big]|_{z=0}$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned} B_1 - B_2 &= \Big(\frac{\partial_z \widetilde{\phi}_1}{\partial_z \rho_1} - \frac{\partial_z \widetilde{\phi}_2}{\partial_z \rho_2}\Big)|_{z=0} = \Big(\frac{\partial_z \widetilde{\phi}}{\partial_z \rho_1} + \big(\frac{1}{\partial_z \rho_1} - \frac{1}{\partial_z \rho_2}\big)\partial_z \widetilde{\phi}_2\Big)|_{z=0} \\ &= \Big(\frac{\partial_z \widetilde{\phi}}{\partial_z \rho_1} - \frac{\partial_z \rho}{\partial_z \rho_1}\frac{\partial_z \widetilde{\phi}_2}{\partial_z \rho_2}\Big)|_{z=0} \end{aligned}$$

et on remplace $\widetilde{\phi}$ par $w + T_{b_2}\rho$ dans la dernière expression. □

Ensuite on estime des dérivées de $b_2$.

der:b2 **Lemme 8.9.** *Pour $k = 0, 1, 2$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ telle que*

$$\|\partial_z^k b_2\|_{C^0((-1,0),L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}-k}))} \le \mathcal{F}(\|\eta_2\|_{H^{s+\frac{1}{2}}})\|\psi_2\|_{H^{s+\frac{1}{2}}}.$$

*Démonstration.* On borne $\nabla_{x,z}\widetilde{\phi}_2$ dans $L^\infty((-1,0), L^\infty(I, H^{s-\frac{1}{2}-k}))$ en utilisant le Corollaire 4.20 (régularité elliptique). On borne ensuite $\partial_z^2\widetilde{\phi}_2$ en utilisant l'équation satisfaite par $\widetilde{\phi}_2$ et les lois de produit. Enfin on estime les dérivés de $\rho_2$ directement à partir de son expression. □

On peut alors estimer certains termes du membre de droite de (8.28). En effet en utilisant le Théorème 10.11 avec $\sigma_0 = s-1, \sigma_1 = s - \frac{1}{2}, \sigma_2 = s - \frac{3}{2}$ il vient à $t$ fixé

$$\|(b_2 - T_{b_2})\partial_z \rho|_{z=0}\|_{H^{s-1}} \le C\|b_2|_{z=0}\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|\partial_z\rho|_{z=0}\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le \|B_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|\eta\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}$$

et donc en utilisant la Proposition 8.6 il vient

debut:B1 (8.29)
$$\|(b_2 - T_{b_2})\partial_z\rho|_{z=0}\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \le \mathcal{F}(M_1 + M_2)\big\{N(0) + TN(T)\big\}.$$

Ensuite, comme $s - \frac{1}{2} > \frac{d}{2}$ on a

$$\|T_{\partial_z b_2}\ \rho|_{z=0}\|_{H^{s-1}} \le C\|\partial_z b_2|_{z=0}\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|\eta\|_{H^{s-1}}.$$

Le Lemme 8.9 et la Proposition 8.6 impliquent alors

debut:B2 (8.30)
$$\|T_{\partial_z b_2}\ \rho|_{z=0}\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \le \mathcal{F}(M_1 + M_2)\big\{N(0) + TN(T)\big\}.$$

Pour terminer la preuve de l'estimation de $B$ dans la Proposition 8.7 il suffit donc de prouver le résultat suivant.

est:w **Lemme 8.10.** *Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que pour tout $t \in [0, T]$*

$$\|\nabla_{x,z} w\|_{C^0([-1,0],H^{s-1})} \le \mathcal{F}(M_1 + M_2)\big\{N(0) + TN(T)\big\}.$$

La méthode de preuve consiste à montrer que $w$ satisfait une équation elliptique, dans les variables $(x,z)$, à laquelle nous pourrons appliquer les résultats du Théorème 4.18. On commence par estimer la trace de $w$ sur $z=0$.

est:psi-TB **Lemme 8.11.** *On a*

$$\|\psi - T_{B_2}\eta\|_{L^\infty(I,H^s)} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}. \tag{8.31}$$

*Démonstration.* On estime d'abord les basses fréquences i.e. $\|\psi - T_2\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})}$. L'inégalité

$$\|T_{B_2}\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}$$

résulte de (8.23). Pour estimer $\psi$ on utilise les équations vérifiées par les $\psi_j$. Il vient

$$\partial_t\psi = -g\eta - \frac{1}{2}\nabla_x(\psi_1+\psi_2)\cdot\nabla_x\psi + \frac{1}{2}(B_1+B_2)B + \frac{1}{2}|\nabla_x\eta_1|^2(B_1+B_2)B + \frac{1}{2}B_2^2\nabla_x(\eta_1+\eta_2)\cdot\nabla_x\eta := F.$$

Il suffit de montrer que

est::F
$$\|F\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T). \tag{8.32}$$

L'estimation de $\eta$ est triviale. Ensuite, à $t$ fixé on a

$$\|\nabla_x(\psi_1+\psi_2)\cdot\nabla_x\psi\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le \|\nabla_x(\psi_1+\psi_2)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|\nabla_x\psi\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T).$$

De même

$$\begin{aligned}
&\|(B_1+B_2)B\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le \|B_1+B_2\|_{H^s}\|B\|_{H^{s-1}} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T),\\
&\||\nabla_x\eta_1|^2(B_1+B_2)B\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le \||\nabla_x\eta_1|^2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|B_1+B_2\|_{H^s}\|B\|_{H^{s-1}} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T),\\
&\|B_2^2\nabla_x(\eta_1+\eta_2)\cdot\nabla_x\eta\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le \|B_2^2\nabla_x(\eta_1+\eta_2)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|\eta\|_{H^{s-\frac{1}{2}}} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)N(T),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (8.32).

On estime maintenant les hautes fréquences i.e. $\|\nabla_x(\psi - T_{B_2}\eta)\|_{L^\infty(I,H^{s-1})}$. Comme $\nabla_x\psi_j = V_j + B_j\nabla_x\eta_j$ et $\nabla_x\eta_j = \zeta_j$, on peut écrire

est:HF1
$$\nabla_x(\psi - T_{B_2}\eta) = \nabla_x\psi - T_{B_2}\nabla_x\eta - T_{\nabla_x B_2}\eta = V + \zeta_1 B + (B_2 - T_{B_2})\nabla_x\eta - T_{\nabla_x B_2}\eta. \tag{8.33}$$

D'après le Lemme 10.11 avec $\sigma_0 = s-1, \sigma_1 = s, \sigma_2 = s-\frac{3}{2}$ et (8.23) on a, à $t$ fixé

est:HF2
$$\|(B_2 - T_{B_2})\nabla_x\eta\|_{H^{s-1}} \le \|B_2\|_{H^s}\|\nabla_x\eta\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}. \tag{8.34}$$

Ensuite, toujours d'après (8.23)

est:HF3
$$\|T_{\nabla_x B_2}\eta\|_{H^{s-1}} \le \|\eta\|_{H^{s-1}} \le \|\nabla_x B_2\|_{H^{s-1}}\|\eta\|_{H^{s-1}} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}. \tag{8.35}$$

Il reste à estimer $V+\zeta_1 B$. On se propose de montrer que

est:BIA
$$\|V+\zeta_1 B\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \le \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}. \tag{8.36}$$

Rappelons que l'on a posé dans le Lemme 8.4 $\varphi = T_{\sqrt{\lambda_1}}(V+\zeta_1 B)$. On a donc

VBphi (8.37)
$$V+\zeta_1 B = T_{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\varphi + \big(I - T_{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}} T_{\sqrt{\lambda_1}}\big)(V+\zeta_1 B).$$

Il résulte du calcul symbolique et du Lemme 8.5 que

est:phi (8.38)
$$\|T_{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}}\varphi\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(M_1)\|\varphi\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}.$$

Ensuite l'opérateur $I - T_{\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}} T_{\sqrt{\lambda_1}}$ est d'ordre $-\frac{1}{2}$ avec des seminormes bornées par $\mathcal{F}(M_1)$. En utilisant deux fois l'égalité (8.37) et l'estimation (8.38) on obtient alors

est:BIA2 (8.39)
$$\|V+\zeta_1 B\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\} + \mathcal{F}(M_1)\|V+\zeta_1 B\|_{L^\infty(I,H^{s-2})}.$$

Il reste donc à estimer le deuxième terme du membre de droite. Comme $\partial_t B + V_1\nabla_x B = \mathfrak{a} - V\cdot\nabla_x B_2$ on déduit de (10.45) que

$$\|B\|_{L^\infty(I,H^{s-2})} \leq \mathcal{F}(\|V_1\|_{L^1(I,H^s)})\Big(\|B(0)\|_{H^{s-2}} + \int_0^T \big(\|V_1\cdot\nabla_x B\|_{H^{s-2}} + \|\mathfrak{a}\|_{H^{s-2}}\|V\cdot\nabla_x B_2\|_{H^{s-2}}\big)\,dt\Big).$$

Comme

$$\begin{aligned}
\|V_1\cdot\nabla_x B\|_{L^\infty(I,H^{s-2})} &\leq C\|V_1\|_{L^\infty(I,H^s)}\|B\|_{L^\infty(I,H^{s-1})},\\
\|V\cdot\nabla_x B_2\|_{L^\infty(I,H^{s-2})} &\leq C\|V\|_{L^\infty(I,H^{s-1})}\|B_2\|_{L^\infty(I,H^s)},
\end{aligned}$$

on déduit
$$\|B\|_{L^\infty(I,H^{s-2})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}.$$
De la même manière on obtient

$$\|V\|_{L^\infty(I,H^{s-2})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}$$

et donc, à l'aide de (8.39), on déduit (8.36).

En utilisant (8.33), (8.34), (8.35) et (8.36) on obtient finalement

$$\|\nabla_x(\psi - T_{B_2}\eta)\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)\big\{N(0)+TN(T)\big\}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

*Démonstration du Lemme 10.38.* Rappelons que $w = \widetilde{\phi} - T_{b_2}\rho$. On a

$$\partial_z^2\widetilde{\phi} + \alpha_1\Delta\widetilde{\phi} + \beta_1\cdot\nabla\partial_z\widetilde{\phi} - \gamma_1\partial_z\widetilde{\phi} = (\gamma_1-\gamma_2)\partial_z\widetilde{\phi}_2 + F_1,$$

où
$$F_1 = (\alpha_2-\alpha_1)\Delta\widetilde{\phi}_2 + (\beta_2-\beta_1)\cdot\nabla\partial_z\widetilde{\phi}_2.$$
On montre que pour tout $t\in[0,T]$

est::F1 (8.40)
$$\|F_1(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1+M_2)\{N(0)+TN(T)\}.$$

Les deux termes de $F_1$ se majorent de la même manière. On considérera seulement le premier. Utilisant le Théorème 10.10 avec $s_0 = s - \frac{3}{2}, s_1 = s-1, s_2 = s - \frac{3}{2}$ on peut écrire à $t$ fixé,

$$\|(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta\widetilde{\phi}_2\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq C\|\alpha_2 - \alpha_1\|_{L^2(J,H^{s-1})}\|\Delta\widetilde{\phi}_2\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{3}{2}})}.$$

On utilise alors le Lemme 4.28 et le Théorème 4.18 avec $\sigma = s - \frac{1}{2}$ pour conclure que le terme ci-dessus peut être estimé par $C\|\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}\mathcal{F}(M_2)$ et donc, d'après la Proposition 8.6, par le membre de droite de (8.40).

On introduit les opérateurs

$$P_j := \partial_z^2 + \alpha_j\Delta + \beta_j\cdot\nabla\partial_z, \qquad L_j = P_j - \gamma_j\partial_z, \qquad (j=1,2).$$

Avec ces notations on a $\gamma_j = \frac{1}{\partial_z\rho_j}P_j\rho_j$ et

L1vG1

$$L_1 v = (\gamma_1 - \gamma_2)\partial_z\widetilde{\phi}_2 + F_1. \tag{8.41}$$

En outre

$$\begin{aligned}
\gamma_1 - \gamma_2 &= \frac{1}{\partial_z\rho_1}P_1\rho_1 - \frac{1}{\partial_z\rho_2}P_2\rho_2 = \frac{1}{\partial_z\rho_2}P_1\rho_1 + \Big(\frac{1}{\partial_z\rho_1} - \frac{1}{\partial_z\rho_2}\Big)P_1\rho_1 - \frac{1}{\partial_z\rho_2}P_2\rho_2 \\
&= \frac{1}{\partial_z\rho_2}P_1\rho + \frac{1}{\partial_z\rho_2}(P_1 - P_2)\rho_2 + \Big(\frac{1}{\partial_z\rho_1} - \frac{1}{\partial_z\rho_2}\Big)P_1\rho_1 \\
&= \frac{1}{\partial_z\rho_2}P_1\rho + \Big(\frac{1}{\partial_z\rho_1} - \frac{1}{\partial_z\rho_2}\Big)P_1\rho_1 + F_2,
\end{aligned}$$

où

eq::F2

$$F_2 = \frac{1}{\partial_z\rho_2}\Big((\alpha_1 - \alpha_2)\Delta\rho_2 + (\beta_1 - \beta_2)\cdot\nabla\partial_z\rho_2\Big). \tag{8.42}$$

On observe alors que

$$\Big(\frac{1}{\partial_z\rho_1} - \frac{1}{\partial_z\rho_2}\Big)P_1\rho_1 = -\frac{\partial_z\rho}{\partial_z\rho_2}\frac{P_1\rho_1}{\partial_z\rho_1} = -\frac{\partial_z\rho}{\partial_z\rho_2}\gamma_1,$$

ce qui implique

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \frac{1}{\partial_z\rho_2}P_1\rho - \frac{\partial_z\rho}{\partial_z\rho_2}\gamma_1 + F_2 = \frac{1}{\partial_z\rho_2}L_1\rho + F_2.$$

Incluant cette information dans (8.41) on obtient

eq::1v

$$L_1 v - b_2(L_1\rho) = F_1 + (\partial_z\widetilde{\phi}_2)F_2. \tag{8.43}$$

Nous allons montrer que pour $t$ fixé on a

est::F2

$$\Big\|(\partial_z\widetilde{\phi}_2)F_2(t,\cdot)\Big\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1,M_2)\{N(0) + TN(T)\}. \tag{8.44}$$

Pour cela on utilise tout d'abord le Théorème 10.10 avec $s_0 = s - \frac{3}{2}, s_1 = s - \frac{1}{2}, s_2 = s - \frac{3}{2}$, ce qui permet d'écrire

$$\Big\|(\partial_z\widetilde{\phi}_2)F_2(t,\cdot)\Big\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq C\|(\partial_z\widetilde{\phi}_2)(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{1}{2}})}\|F_2(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})}.$$

Par le Théorème 4.18, de régularité elliptique, le premier terme du membre de droite est majoré par $\mathcal{F}(M_2)$. Il suffit donc de borner le second. On a , pour $t$ fixé

$$\left\| \frac{1}{\partial_z \rho_2}(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta\rho_2 \right\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_2)\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{L^2(J,H^{s-1})}\|\Delta\rho_2\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{3}{2}})}.$$

Utilisant le Lemme 4.28 et le Théorème 4.18 on voit que le membre de droite peut être estimé par le membre de droite de (8.44). Le second terme de $F_2$ est estimaté de la même manière.

Pour estimer $\widetilde{\phi} - T_{b_2}\rho$ on paralinéarise en écrivant

eq::2v (8.45)
$$b_2(L_1\rho) = T_{b_2}L_1\rho + T_{L_1\rho}b_2 + F_3.$$

Nous allons montrer que pour $t \in [0,T]$ on a

est::F3 (8.46)
$$\|F_3(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\{N(0) + TN(T)\}.$$

Pour prouver cela on utilise le Lemme (RESTE) avec $\alpha = s - \frac{1}{2}, \beta = s - 2$. Then $\alpha + \beta - \frac{d}{2} > s - \frac{3}{2}$. On en déduit que pour $z$ et $t$ fixés on a

$$\|F_3(t,\cdot,z)\|_{H^{s-\frac{3}{2}}} \leq C\|b_2\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}\|L_1\rho\|_{H^{s-2}}.$$

Therefore

$$\|F_3(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq C\|b_2\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{1}{2}})}\|L_1\rho\|_{L^2(J,H^{s-2})}.$$

D'après le Lemme 8.9 on a $\|b_2(t\cdot)\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{1}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_2)$ et le Théorème 10.28 montre que $\|L_1\rho\|_{L^2(J,H^{s-2})} \leq \mathcal{F}(M_1)\|\eta\|_{H^{s-\frac{1}{2}}}$. L'inégalité (8.46) se déduit alors de la Proposition 8.6.

Posons $F_4 = T_{L_1\rho}b_2$. Nous allons montrer que pour $t$ fixé on a

est::F4 (8.47)
$$\|F_4(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\{N(0) + TN(T)\}.$$

Pour cela on utilise le Théorème **??** avec with $\alpha = s - \frac{3}{2}, \beta = s - 2, \mu = s - \frac{1}{2}$. On obtient

$$\|F_4(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \|L_1\rho(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-2})}\|b_2(t,\cdot)\|_{L^\infty(J,H^{s-\frac{1}{2}})}$$

et (8.47) se déduit des estimations précédentes.

Maintenant d'après (8.43), (8.45) on a

$$L_1 v - T_{b_2}L_1\rho = F_1 + (\partial_z\widetilde{\phi}_2)F_2 + F_3 + F_4.$$

Ensuite d'après le Lemme 8.9 et le calcul symbolique peut écrire

$$L_1 T_{b_2}\rho = T_{b_2}L_1\rho + F_5$$

avec

$$\|F_5(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\{N(0) + TN(T)\}.$$

Par conséquent on a

$$L_1 w = L_1(v - T_{b_2}\rho) = F_1 + (\partial_z \widetilde{\phi}_2)F_2 + F_3 + F_4 + F_5 := F$$

où $\|F(t,\cdot)\|_{L^2(J,H^{s-\frac{3}{2}})}$ est borné par le membre de droite de (8.47).

Utilisant (8.27) et le Lemme 8.11 on peut appliquer à $w$ le Théorème 4.18 avec $\sigma = s-1$ pour conclure la preuve du Lemme 10.38 et donc celle de la Proposition 8.7 pour $B$.

Il nous reste donc à estimer $V$. On utilise pour cela (8.36) et l'estimation sur $B$ que l'on vient d'obtenir ainsi que le Théorème 10.10. Il vient

$$\|V\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \leq \|V + \zeta_1 B\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} + \|\zeta_1 B\|_{L^\infty(I,H^{s-1})} \leq \mathcal{F}(M_1 + M_2)\big\{N(0) + TN(T)\big\}$$

ce qui termine la preuve de la Proposition 8.7 et par conséquent celle de l'inégalité (8.2). $\square$

# 9 La théorie de Cauchy

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le Théorème 3.1 énoncé dans la section 3, en utilisant les résultats des sections 7 et 8. La preuve se fera en cinq étapes.

*Etape 1: cas des données très régulières*

Le Théorème 3.1 a été démontré par Lannes et Wu lorsque la donnée $(\eta_0, \psi_0)$ appartient à $H^{\underline{s}+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{\underline{s}+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ pour $\underline{s} \geq \underline{s}_0(d)$ assez grand. Pour une telle donnée il existe $T^* > 0$ et une solution $(\eta, \psi) \in C^0([0, T^*[, H^{\underline{s}+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{\underline{s}+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$ du système (2.12). En outre

crit:explo

$$\text{si} \quad T^* < +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{t \to T^*} \|(\eta(t,\cdot), \psi(t,\cdot))\|_{H^{\underline{s}+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{\underline{s}+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)} = +\infty. \tag{9.1}$$

*Etape 2 : régularisation des données*

Soit $s > 1 + \frac{d}{2}$. Posons pour simplifier

$$\mathcal{H}^s = H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d) \times H^s(\mathbf{R}^d) \times H^s(\mathbf{R}^d).$$

Soit $(\eta_0, \psi_0, B_0, V_0) \in \mathcal{H}^s$ et pour $\varepsilon > 0, \varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ où $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ est d'intégrale égale à 1. On pose

$$\eta_{0,\varepsilon} = \varphi_\varepsilon \star \eta_0, \quad \psi_{0,\varepsilon} = \varphi_\varepsilon \star \psi_0, \quad B_{0,\varepsilon} = \varphi_\varepsilon \star B_0, \quad V_{0,\varepsilon} = \varphi_\varepsilon \star V_0.$$

Alors lorsque $\varepsilon$ est fixé, $(\eta_{0,\varepsilon}, \psi_{0,\varepsilon}) \in H^N(\mathbf{R}^d) \times H^N(\mathbf{R}^d)$ pour tout $N \in \mathbf{N}$. On peut donc appliquer le résultat de l'étape 1 à cette donnée et en déduire que

$$\text{il existe} \quad T_\varepsilon^* > 0 \quad \text{et} \quad (\eta_\varepsilon, \psi_\varepsilon) \in C^0([0, T_\varepsilon^*[, H^N(\mathbf{R}^d) \times H^N(\mathbf{R}^d))$$

solution du système (2.12).

Nous allons montrer qu'il existe $T_1 > 0$ indépendant de $\varepsilon$ tel que $T_\varepsilon^* \geq T_1$ i.e.que ces solutions existent sur un intervalle de temps fixe. Utilisons pour cela le Théorème 7.1 avec $s = s_0$. Il vient, avec des notations évidentes (cf. (7.1))

$$M_s^\varepsilon(T) \leq \mathcal{F}\big(\mathcal{F}(M_{s,0}^\varepsilon) + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_s^\varepsilon(T))\big), \quad \forall T \in [0, T_\varepsilon^*[.$$

Comme $(\eta_{0,\varepsilon}, \psi_{0,\varepsilon}, B_{0,\varepsilon} V_{0,\varepsilon})$ converge vers $(\eta_0, \psi_0, B_0, V_0)$ dans $\mathcal{H}^s$ (et $\mathcal{F}$ étant croissante)

$$\text{il existe } \ A_0 > 0 \ \text{ indépendant de } \ \varepsilon \ \text{ tel que } \mathcal{F}(M_{s,0}^\varepsilon) \leq A_0.$$

On en déduit que

$$M_s^\varepsilon(T) \leq \mathcal{F}\big(A_0 + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(M_s^\varepsilon(T))\big), \quad \forall T \in [0, T_\varepsilon^*[.$$

On déduit du Lemme 10.34 que

est:gronw1 (9.2) $$\exists T_0 > 0 \ \text{indépendant de } \varepsilon : M_s^\varepsilon(T) \leq \mathcal{F}(2A_0) := A_1, \quad \forall T \in [0, \min(T_0, T_\varepsilon^*)[.$$

Utilisons à nouveau le Théorème 7.1 avec $\underline{s}$ à la place de $s$ et $s$ à la place de $s_0$. Il vient

est:gronw2 (9.3) $$M_{\underline{s}}^\varepsilon(T) \leq \mathcal{F}\big(A_0 + T^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(A_1)\big)\big(M_{\underline{s},0}^\varepsilon + T^{\frac{1}{2}} M_{\underline{s}}^\varepsilon(T)\big), \quad \forall T \in [0, \min(T_0, T_\varepsilon^*)[.$$

Soit alors $0 < T_1 \leq T_0$ tel que $T_1^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{F}\big(A_0 + T_0^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(A_1)\big) \leq \frac{1}{2}$. Il résulte de (9.3) que

est:gronw3 (9.4) $$M_{\underline{s}}^\varepsilon(T) \leq 2\mathcal{F}\big(A_0 + T_0^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(A_1)\big) M_{\underline{s},0}^\varepsilon, \quad \forall T \in [0, \min(T_1, T_\varepsilon^*)[.$$

Montrons que pour tout $\varepsilon \in (0,1)$ on a $T_\varepsilon^* > T_1$. En effet supposons qu'il existe $\varepsilon_0 \in (0,1)$ tel que $T_{\varepsilon_0}^* \leq T_1$. Alors $\min(T_1, T_\varepsilon^*) = T_{\varepsilon_0}^*$ de sorte que (9.4) montre que

$$M_{\underline{s}}^{\varepsilon_0}(T) \leq 2\mathcal{F}\big(A_0 + T_0^{\frac{1}{2}}\mathcal{F}(A_1)\big) M_{\underline{s},0}^{\varepsilon_0}, \quad \forall T \in [0, T_\varepsilon^*[,$$

ce qui contredit (9.1).

La solution $(\eta_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ existe donc sur un intervalle de temps uniforme $[0, T_1]$..

*Etape 3: convergence*

On montre dans ce paragraphe que $(\eta_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$ converge (dans un sens à préciser) sur le domaine $[0, T_1] \times \mathbf{R}^d$ vers une solution du système (2.12). Notons $I = [0, T_1]$.

Tout d'abord d'après (9.2) on a

sol:borne (9.5) $$M_s^\varepsilon(T) \leq A_1, \quad \forall T \in I.$$

L'espace $L^\infty(I, \mathcal{H}^s)$ étant un dual, le Théorème de Banach Alaoglu implique qu'il existe une sous suite $(\varepsilon_k)$ telle que, dans la topologie faible*

$$(\eta_{\varepsilon_k}, \psi_{\varepsilon_k}, B_{\varepsilon_k}, V_{\varepsilon_k}) \text{ converge vers } (\eta, \psi, B, V) \in L^\infty(I, H^{s+\frac{1}{2}} \times H^{s+\frac{1}{2}} \times H^s \times H^s).$$

D'autre part d'après le Théorème 8.1 la suite $(\eta_\varepsilon, \psi_\varepsilon, B_\varepsilon, V_\varepsilon)$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(I, \mathcal{H}^{s-1})$. On en déduit que

suite:cauchy (9.6) $$(\eta_\varepsilon, \psi_\varepsilon, B_\varepsilon, V_\varepsilon) \to (\eta, \psi, B, V) \in L^\infty(I, \mathcal{H}^s), \ \text{ dans } L^\infty(I, H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-\frac{1}{2}} \times H^{s-1} \times H^{s-1}).$$

De l'inégalité d'interpolation

in:interp (9.7) $$\|u\|_{H^{\sigma-\delta}} \leq \|u\|_{H^\sigma}^{1-\delta}\|u\|_{H^{\sigma-1}}^{\delta}, \quad 0<\delta<1$$

appliquée avec $\sigma = s+\frac{1}{2}, \sigma = s$ et de (9.8) on déduit que pour tout $0<\delta<1$

suite:cauchy (9.8) $$(\eta_\varepsilon, \psi_\varepsilon, B_\varepsilon, V_\varepsilon) \to (\eta, \psi, B, V), \text{ dans } L^\infty(I, H^{s+\frac{1}{2}-\delta} \times H^{s+\frac{1}{2}-\delta} \times H^{s-\delta} \times H^{s-\delta}).$$

Nous allons en déduire que

cv:sol (9.9) $$B = \frac{\nabla_x\psi \cdot \nabla_x\eta + G(\eta)\psi}{1+|\nabla_x\eta|^2}, \quad V = \nabla_x\psi - B\nabla_x\eta.$$

Tout d'abord d'après (9.8), $\nabla_x\eta_\varepsilon \to \nabla_x\eta$ et $\nabla_x\psi_\varepsilon \to \nabla_x\psi$ dans $L^\infty(I, H^{s-\frac{1}{2}-\delta})$. Comme $s > 1+\frac{d}{2}$ cet espace est une algèbre si $\delta$ est assez petit. Donc $\nabla_x\eta_\varepsilon \cdot \nabla_x\psi_\varepsilon \to \nabla_x\eta_\varepsilon \cdot \nabla_x\psi_\varepsilon$ et $|\nabla_x\eta_\varepsilon|^2 \to |\nabla_x\eta|^2$. Ensuite

G:borne (9.10) $$G(\eta_\varepsilon)\psi_\varepsilon \to G(\eta)\psi \text{ dans } L^\infty(I, H^{s-\frac{1}{2}-\delta}).$$

En effet d'après le Théorème 4.13 avec $s = s_0, \sigma = s-\frac{1}{2}$ et (9.5) il existe $M_0$ indépendant de $\varepsilon$ tel que

G:borne2 (9.11) $$\|G(\eta_\varepsilon)\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})} \leq \mathcal{F}(\|(\eta_\varepsilon,\psi_\varepsilon)\|_{L^\infty(I,H^{s+\frac{1}{2}}\times H^{s+\frac{1}{2}})}) \leq M_0.$$

Ensuite on écrit

$$\|G(\eta_\varepsilon)\psi_\varepsilon - G(\eta)\psi\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} \leq \|G(\eta_\varepsilon)\psi - G(\eta)\psi\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})} + \|G(\eta_\varepsilon)[\psi_\varepsilon - \psi]\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{3}{2}})}.$$

En utilisant le Théorème 4.26 et (9.5) le premier terme du membre de droite est majoré par

$$\mathcal{F}(\|(\eta_\varepsilon,\eta)\|_{L^\infty(I,H^{s+\frac{1}{2}}\times H^{s+\frac{1}{2}})})\|\eta_\varepsilon - \eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}\|\psi\|_{L^\infty(I,H^s)} \leq K\|\eta_\varepsilon-\eta\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}.$$

Il tend donc vers zéro d'après (9.8). Quant au deuxième terme il est majoré par

$$\mathcal{F}\|(\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H^{s+\frac{1}{2}})})\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})} \leq K\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{L^\infty(I,H^{s-\frac{1}{2}})}.$$

Il tend donc également vers zéro. Alors (9.10) résulte de (9.11) et de (9.7) avec $\sigma = s-\frac{1}{2}$. Ecrivant

$$B_\varepsilon = (\nabla_x\psi_\varepsilon \cdot \nabla_x\eta_\varepsilon + G(\eta_\varepsilon)\psi_\varepsilon)\Big(1 - \frac{|\nabla_x\eta_\varepsilon|^2}{1+|\nabla_x\eta_\varepsilon|^2}\Big)$$

on en déduit que $B_\varepsilon \to B$ (donné par (9.9)) dans $L^\infty(I, H^{s-\frac{1}{2}-\delta})$. Il en est de même pour $V_\varepsilon$.

Montrons enfin que $(\eta,\psi)$ est solution du système (2.12).

D'après (9.8), $\partial_t\eta_\varepsilon$ et $\partial_t\psi_\varepsilon$ convergent vers $\partial_t\eta$ et $\partial_t\psi$ dans $\mathcal{D}'(I\times\mathbf{R}^d)$. D'après (9.10) on voit que la première équation de (2.12) est satisfaite. Le second membre de la deuxième équation de (2.12) s'écrit $-\frac{1}{2}|\nabla_x\psi_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}(1+|\nabla_x\eta_\varepsilon|^2)B_\varepsilon^2 - g\eta_\varepsilon$. D'après ci-dessus il converge dans $L^\infty(I, H^{s-\frac{1}{2}-\delta})$ vers $-\frac{1}{2}|\nabla_x\psi|^2 + \frac{1}{2}(1+|\nabla_x\eta|^2)B^2 - g\eta$, ce qui montre que la deuxième équation est aussi satisfaite.

*Etape 4:* $(\eta,\psi)\in C^0(I,H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12})$.

A ce stade de la preuve on a $(\eta,\psi)\in L^\infty(I,H^{s+\frac12}\times H^{s+\frac12})$ et, en utilisant les équations et le Lemme 10.24, on obtient $(\eta,\psi)\in C^0(I,H^s\times H^s)$. Comme pour $0<\delta<1$ on a par interpolation

$$\begin{aligned}\|\eta(t,\cdot)-\eta(s,\cdot)\|_{H^{s+\frac12-\frac{\delta}{2}}} &\leq C\|\eta(t,\cdot)-\eta(s,\cdot)\|^{1-\delta}_{H^{s+\frac12}}\|\eta(t,\cdot)-\eta(s,\cdot)\|^{\delta}_{H^s}\\ &\leq C'\|\eta\|^{1-\delta}_{L^\infty(I,H^{s+\frac12})}\|\eta(t,\cdot)-\eta(s,\cdot)\|^{\delta}_{H^s},\end{aligned}$$

on en déduit que $(\eta,\psi)\in C^0(I,H^{s'+\frac12}\times H^{s'+\frac12})$ pour tout $s'<s$. La continuité au niveau $H^{s+\frac12}$ est un peu plus délicate mais peut être prouvée en utilisant un argument dû à Bona et Smith.

*Etape 5: unicité*

Elle résulte immédiatement du Théorème 8.1 car si $(\eta_1,\psi_1)|_{t=0}=(\eta_2,\psi_2)|_{t=0}$ on a également $(B_1,V_1)|_{t=0}=(B_2,V_2)|_{t=0}$ i.e. $\mathcal{U}_1|_{t=0}=\mathcal{U}_2|_{t=0}$.

# 10 Appendice.

On se propose dans cet appendice de développer le calcul symbolique paradifférentiel et d'en donner des applications, en commençant par le cas où les symboles sont des fonctions i.e. par les opérateurs de paramultiplication. On établit ensuite quelques lemmes utiles.

## 10.1 Opérateurs de paramultiplication

### 10.1.1 Décomposition de Littelwood-Paley

On introduit tout d'abord la décomposition de Littelwood-Paley. Pour $p\in\mathbf{N}$ on notera $\mathcal{C}_p$ la couronne

$$\mathcal{C}_p=\{\xi\in\mathbf{R}^d:\frac12 2^p\leq|\xi|\leq 2\,2^p\}.$$

Soit $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp}\psi\subset\{\xi\in\mathbf{R}^d:|\xi|\leq1\},\psi(\xi)=1$ si $|\xi|\leq\frac12$. Posons

$$\varphi(\xi)=\psi\big(\frac{\xi}{2}\big)-\psi(\xi),\quad \xi\in\mathbf{R}^d.$$

Il est facile de voir que $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathcal{C}_0$ et que pour tout $N\in\mathbf{N}^*$ on a

phip (10.1)
$$\sum_{p=0}^{N-1}\varphi(2^{-p}\xi)+\psi(\xi)=\psi(2^{-N}\xi).$$

Pour $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ on pose

deltaS (10.2)

$$\Delta_p u = \varphi(2^{-p}D)u,\ \Delta_{-1}u = \psi(D)u,\ S_j(u) = \sum_{p=-1}^{j-1} \Delta_p u = \psi(2^{-j}D)u,\ j \in \mathbf{N}, S_j(u) = 0, j < 0.$$

Il résulte de (10.1) que dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ on a $u = \sum_{p=-1}^{+\infty} \Delta_p u$.

On peut alors caractériser les espaces de Sobolev.

sobo **Théorème 10.1.** *(i) Soit $s \in \mathbf{R}$. Si $u \in H^s(\mathbf{R}^d)$ on a $\|\Delta_p u\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq c_p 2^{-ps}, p \geq -1$ avec $\big(\sum_{p\geq -1} c_p^2\big)^{\frac{1}{2}} \leq C\|u\|_{H^s(\mathbf{R}^d)}$.*

*(ii) Soit $s \in \mathbf{R}$. Soit pour $p \geq -1$ $u_p \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \cap \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp} \widehat{u}_p \subset \mathcal{C}_p$ et $\|u_p\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq c_p 2^{-ps}$ avec $\big(\sum_{p\geq -1} c_p^2\big)^{\frac{1}{2}} < +\infty$. Alors $u = \sum_{p\geq -1} u_p \in H^s(\mathbf{R}^d)$ et $\|u\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \leq C(\sum_{p\geq -1} c_p^2\big)^{\frac{1}{2}}$*

*(iii) Soit $s > 0$. On a le même énoncé qu'en (ii) si $\operatorname{supp} \widehat{u}_p \subset B(0, K2^p)$.*

On introduit maintenant les espaces de Zygmund.

zygmund **Definition 10.2.** *Soit $s \in \mathbf{R}$. On pose*

$$C_*^s(\mathbf{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d) : \|\Delta_p u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq C2^{-ps}\}$$

*que l'on munit de la norme $\|u\|_{C_*^s(\mathbf{R}^d)} = \sup_{p\geq -1} \big(2^{ps}\|\Delta_p u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}\big)$.*

C'est un espace de Banach qui a un lien avec les espaces de Hölder. Rappelons tout d'abord la définition de ceux-ci.

holder **Definition 10.3.**

*(i) Si $k \in \mathbf{N}$ $\quad W^{k,\infty}(\mathbf{R}^d) = \{u \in L^\infty(\mathbf{R}^d) : D^\alpha u \in L^\infty(\mathbf{R}^d), |\alpha| \leq k\}$.*

*(ii) Si $s \notin \mathbf{N}, s = k + \sigma, k \in \mathbf{N}, 0 < \sigma < 1$*

*$W^{s,\infty}(\mathbf{R}^d) = \{u \in W^{k,\infty}(\mathbf{R}^d) : |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leq C|x-y|^\sigma,\ |\alpha| = k,\ |x-y| \leq 1\}$.*

On munit ces espaces des normes naturelles. Ce sont alors des espaces de Banach.

**Proposition 10.4.** *Si $s = k+\sigma \notin \mathbf{N}$ on a $W^{s,\infty}(\mathbf{R}^d) = C_*^s(\mathbf{R}^d)$ avec équivalence des normes.*

**Proposition 10.5.** *Pour $s \in \mathbf{R}, s > \frac{d}{2}$ on a $H^s(\mathbf{R}^d) \subset C_*^{s-\frac{d}{2}}(\mathbf{R}^d)$.*

On définit maintenant les opérateurs de **paramultiplication**.

paramult **Definition 10.6.** *Pour $a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ l'opérateur de paramultiplication $T_a$ est défini sur $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$ par*

$$T_a u = \sum_{q\geq -1}\sum_{p\leq q-2} \Delta_p a \Delta_q u = \sum_{q\geq -1} S_{q-2}(a)\Delta_q u.$$

Par rapport à la simple multiplication, la paramultiplication ne fait intervenir que les fréquences de $a$ plus petites que celles de $u$. L'avantage d'introduire cette notion est visible dans les résultats suivants.

### 10.1.2 Résultats de continuité.

Dans ce qui suit on notera $E = E(\mathbf{R}^d)$ pour $d \geq 1$ et $E = L^\infty, H^s, C^s_* \ldots$

cont1 **Théorème 10.7.** *1. Pour tout $s \in \mathbf{R}$, il existe $C > 0$ telle que pour tout $a \in L^\infty$*

$$\|T_a u\|_{H^s} \leq C\|a\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}, \quad \forall u \in H^s,$$
$$\|T_a u\|_{C^s_*} \leq C\|a\|_{L^\infty}\|u\|_{C^s_*}, \quad \forall u \in C^s_*.$$

*2. Soit $m > 0$ et $s \in \mathbf{R}$. Il existe $C > 0$ telle que pour tout $a \in C^{-m}_*$*

$$\|T_a u\|_{H^{s-m}} \leq C\|a\|_{C^{-m}_*}\|u\|_{H^s}, \quad \forall u \in H^s.$$

*3. Soit $\alpha, \beta, \gamma$ des réels tels que*

$$\alpha \leq \mu, \qquad \alpha \leq \beta + \mu - \frac{d}{2}, \qquad \alpha < \mu, \ si \ \beta = \frac{d}{2}.$$

*Il existe $C > 0$ telle que pour tout $a \in H^\beta$*

$$\|T_a u\|_{H^\alpha} \leq C\|a\|_{H^\beta}\|u\|_{H^\mu}, \quad \forall u \in H^\mu.$$

La signification du point 3. est la suivante: soit $a \in H^\beta$,

$$(i) \quad \text{si } \beta > \frac{d}{2}, \quad T_a \text{ est d'ordre zéro,}$$
$$(ii) \quad \text{si } \beta = \frac{d}{2}, \quad T_a \text{ est d'ordre } \varepsilon, \varepsilon > 0,$$
$$(iii) \quad \text{si } \beta < \frac{d}{2}, \quad T_a \text{ est d'ordre } \frac{d}{2} - \beta.$$

*Démonstration du point 3.* On considère trois cas.

cas 1. $\beta > \frac{d}{2}$. Dans ce cas on a $H^\beta \subset L^\infty$ l'injection étant continue. En appliquant le point 1. du Théorème 10.7 et le fait que $\alpha \leq \mu$ on obtient

$$\|T_a u\|_{H^\alpha} \leq C\|a\|_{L^\infty}\|u\|_{H^\alpha} \leq \|a\|_{H^\beta}\|u\|_{H^\gamma}.$$

cas 2. $\beta = \frac{d}{2}$. Alors $\alpha < \mu$ et donc $H^{\frac{d}{2}+\mu-\alpha} \subset L^\infty$. On écrit $T_a u = \sum_q S_{q-2}(a)\Delta_q u := \sum_q v_q$. De plus

$$2^{q\alpha}\|v_q\|_{L^2} \leq 2^{q\alpha}\|S_{q-2}(a)\|_{L^\infty}\|\Delta_q u\|_{L^2} \leq C\, 2^{q\alpha}\|S_{q-2}(a)\|_{H^{\frac{d}{2}+\mu-\alpha}} c_q 2^{-q\mu}\|u\|_{H^\mu}$$

où $(c_q) \in l^2$. Comme $S_{q-2}(a) = \psi(2^{-q}D)a$, où $\operatorname{supp}\psi \subset \{|\xi| \leq 1\}$, on a $\|S_{q-2}(a)\|_{H^{\frac{d}{2}+\mu-\alpha}} \leq C 2^{q(\mu-\alpha)}\|a\|_{H^{\frac{d}{2}}}$ de sorte que

$$2^{q\alpha}\|v_q\|_{L^2} \leq C\, c_q\|a\|_{H^{\frac{d}{2}}}\|u\|_{H^\mu},$$

ce qui prouve l'estimation désirée.

cas 3. $\beta < \frac{d}{2}$. Dans ce cas on a $\alpha \leq \beta + \mu - \frac{d}{2}$. Comme ci-dessus on écrit $T_a = \sum_q v_q$ et

$$\|v_q\|_{L^2} \leq \|S_{q-2}(a)\|_{L^\infty} \|\Delta_q u\|_{L^2} \leq \sum_{p=-1}^{q-2} \|\Delta_p a\|_{L^\infty} \|\Delta_q u\|_{L^2}.$$

Ensuite, en prenant $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ égale à 1 sur le support de $\varphi$, on peut écrire $\Delta_p a = \varphi_1(2^{-p}D)\Delta_p a = 2^{pd}\widehat{\varphi}_1(2^p \cdot) \star \Delta_p a$ d'où

$$\|\Delta_p a\|_{L^\infty} \leq \|2^{pd}\widehat{\varphi}_1(2^p \cdot)\|_{L^2} \|\Delta_p a\|_{L^2} \leq C_1 2^{p\frac{d}{2}} \|\Delta_p a\|_{L^2}.$$

On en déduit

$$\|\Delta_p a\|_{L^\infty} \leq C \sum_{p=-1}^{q-2} 2^{p(\frac{d}{2}-\beta)} 2^{p\beta} \|\Delta_p a\|_{L^2} \leq C_2 \Big( \sum_{p=-1}^{q-2} 2^{2p(\frac{d}{2}-\beta)} \Big)^{\frac{1}{2}} \Big( \sum_{p=-1}^{q-2} 2^{2p\beta} \|\Delta_p a\|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Comme $\frac{d}{2} - \beta > 0$ on a $\left( \sum_{p=-1}^{q-2} 2^{2p(\frac{d}{2}-\beta)} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 2^{q(\frac{d}{2}-\beta)}$ d'où

$$\|\Delta_p a\|_{L^\infty} \leq C_4 2^{q(\frac{d}{2}-\beta)} \Big( \sum_{p=-1}^{q-2} c_p^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \|a\|_{H^\beta}.$$

Par conséquent

$$2^{q\alpha}\|v_q\|_{L^2} \leq C_5 2^{q(\alpha+\frac{d}{2}-\beta)} \|\Delta_q u\|_{L^2} \|a\|_{H^\beta} \leq C_5 2^{q(\alpha-(\beta+\mu-\frac{d}{2}))} c_q \|u\|_{H^\mu} \|a\|_{H^\beta} \leq C_5 c_q \|u\|_{H^\mu} \|a\|_{H^\beta}$$

car $\alpha \leq \beta + \mu - \frac{d}{2}$, ce qui prouve l'estimation désirée. □

**Definition 10.8.** *Etant données deux fonctions $a, b$ définies sur $\mathbf{R}^d$ on pose*

$$R(a,u) = au - T_a u - T_u a.$$

**Théorème 10.9.** *Soit $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha + \beta > 0$. Alors*

Bony (10.3) $$\|R(a,u)\|_{H^{\alpha+\beta-\frac{d}{2}}(\mathbf{R}^d)} \leq K \|a\|_{H^\alpha(\mathbf{R}^d)} \|u\|_{H^\beta(\mathbf{R}^d)},$$

Bony3 (10.4) $$\|R(a,u)\|_{H^{\alpha+\beta}(\mathbf{R}^d)} \leq K \|a\|_{C_*^\alpha(\mathbf{R}^d)} \|u\|_{H^\beta(\mathbf{R}^d)}.$$

Voici une application du Théorème 10.7 au produit dans les espaces de Sobolev, qui sera utile dans la suite.

Ho **Théorème 10.10.** *Soit $s_1, s_2$ deux réels tels que $s_1 + s_2 > 0$. Soit $u_j \in H^{s_j}(\mathbf{R}^d), j = 1, 2$. Alors $u_1 u_2 \in H^{s_0}(\mathbf{R}^d)$ où $s_0$ est tel que*

$$(i) \quad s_0 \leq s_j,\ j = 1, 2, \quad (ii) \quad s_0 \leq s_1 + s_2 - \frac{d}{2}$$

*où dans $(ii)$ l'inégalité est stricte si $s_1 = \frac{d}{2}$ ou $s_2 = \frac{d}{2}$ ou $s_0 = -\frac{d}{2}$. De plus, il existe $C > 0$ ne dépendant que de $s_1, s_2$ et $d$ telle que*

$$\|u_1 u_2\|_{H^{s_0}(\mathbf{R}^d)} \leq C \|u_1\|_{H^{s_1}(\mathbf{R}^d)} \|u_2\|_{H^{s_2}(\mathbf{R}^d)}.$$

*Démonstration.* On écrit

u1u2
$$u_1u_2 = T_{u_1}u_2 + T_{u_2}u_1 + R(u_1,u_2) := (1) + (2) + (3). \tag{10.5}$$

Point 1. On montre (cf. (10.3)) que

(1)
$$\|R(u_1,u_2)\|_{H^{s_0}} \leq \|R(u_1,u_2)\|_{H^{s_1+s_2-\frac{d}{2}}} \leq C\|u_1\|_{H^{s_1}}\|u_2\|_{H^{s_2}}. \tag{10.6}$$

Pour cela on rappelle que

$$R(u_1,u_2) = \sum_{|p-q|\leq 2} \Delta_p u_1 \Delta_q u_2 = \sum_q R_q, \quad R_q = \sum_{|p-q|\leq 2} \Delta_p u_1 \Delta_q u_2.$$

Comme le spectre de $R_q$ est contenu dans une boule de rayon $C2^q$ et non pas dans une couronne il ne suffit pas d'estimer directement $\|R_q\|_{L^2}$ car cela exigerait que $s_1+s_2-\frac{d}{2}$ soit positif (ce qui n'est pas forcémment le cas). Donc on recoupe en écrivant

$$R = \sum_{p\geq -1} \Delta_p R = \sum_{p\geq -1}\sum_q \Delta_p R_q = \sum_{p\geq -1}\sum_{q\geq p-n_0} \Delta_p R_q$$

car si $p > q+n_0$ on a $\Delta_p R_q = 0$. Tous les termes de $R_q$ se majorent de la même façon, de sorte qu'il suffit de considérer celui où $p=q$. On a

$$\begin{aligned}\|\Delta_p R_q\|_{L^2} &\leq C2^{pd}\|\widehat{\varphi}_1(2^p\cdot)\star\big(\Delta_q u_1\Delta_q u_2\big)\|_{L^2} \leq 2^{p\frac{d}{2}}\|\widehat{\varphi}_1\|_{L^2}\|\Delta_q u_1\Delta_q u_2\|_{L^1}\\ &\leq C_1 2^{p\frac{d}{2}}2^{-q(s_1+s_2)}2^{qs_1}\|\Delta_q u_1\|_{L^2}2^{qs_2}\|\Delta_q u_2\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Posons $r_p = 2^{-p\frac{d}{2}}2^{p(s_1+s_2)}\|\Delta_p R\|_{L^2}$ alors, d'après l'inégalité ci-dessus

$$r_p \leq C_1 \sum_{q\geq p-n_0} 2^{(p-q)(s_1+s_2)} g_q, \quad g_q = 2^{qs_1}\|\Delta_q u_1\|_{L^2}2^{qs_2}\|\Delta_q u_2\|_{L^2}.$$

Remarquons que l'on a

$$g_q \leq Cc_q d_q \|u_1\|_{H^{s_1}}\|u_2\|_{H^{s_2}}, \quad (c_q),(d_q)\in l^2.$$

On en déduit que

$$r_p^2 \leq C_1 \sum_{q\geq p-n_0} 2^{(p-q)(s_1+s_2)} \sum_{q\geq p-n_0} 2^{(p-q)(s_1+s_2)} g_q^2 \leq C_2 \sum_{q\geq p-n_0} 2^{(p-q)(s_1+s_2)} g_q^2$$

car $s_1+s_2>0$. Alors

$$\sum_{p\geq -1} r_p^2 \leq C_2 \sum_{q\geq -1}\Big(\sum_{p\leq q+n_0} 2^{-(q-p)(s_1+s_2)}\Big) g_q^2 \leq C_3 \sum_{q\geq -1} g_q^2 \leq C_4\Big(\sum_{q\geq -1} c_q^2 d_q^2\Big)\|u_1\|_{H^{s_1}}^2\|u_2\|_{H^{s_2}}^2.$$

En résumé on a montré que

$$\|\Delta_p R\|_{L^2} = 2^{-p(s_1+s_2-\frac{d}{2})} r_p, \quad \sum_{p\geq -1} r_p^2 \leq C_5\|u_1\|_{H^{s_1}}^2\|u_2\|_{H^{s_2}}^2.$$

Comme le spectre de $\Delta_p R$ est contenu dans une couronne cela montre l'inégalité (10.6).

Point 2. On montre que

(2) (10.7) $$\|T_{u_1}u_2\|_{H^{s_0}} + \|T_{u_2}u_1\|_{H^{s_0}} \leq C\|u_1\|_{H^{s_1}}\|u_2\|_{H^{s_2}}.$$

On applique pour cela le Théorème 10.7 avec $\alpha = s_0$, $\beta = s_1$ (resp.$s_2$) , $\gamma = s_2$ (resp.$s_1$), $a = u_1$ (resp.$u_2$), $u = u_2$ (resp.$u_1$) et on vérifie que les conditions sur les parametres $\alpha, \beta, \gamma$ résultent des hypothèses faites sur $s_0, s_1, s_2$. □

On a également le résultat suivant.

a-Ta **Théorème 10.11.** *Soit $\sigma_1, \sigma_2$ deux réels tels que $\sigma_1 + \sigma_2 > 0$. Soit $a \in H^{\sigma_1}(\mathbf{R}^d), u \in H^{\sigma_2}(\mathbf{R}^d)$. Soit $\sigma_0$ tel que*

$$(i) \quad \sigma_0 \leq \sigma_1, \quad (ii) \quad \sigma_0 \leq \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{d}{2}$$

*où dans $(i)$ l'inégalité est stricte si $\sigma_2 = \frac{d}{2}$. Il existe alors $C > 0$ ne dépendant que de $\sigma_1, \sigma_2$ et $d$ telle que*

$$\|au - T_a u\|_{H^{\sigma_0}(\mathbf{R}^d)} \leq C\|a\|_{H^{\sigma_1}(\mathbf{R}^d)}\|u\|_{H^{\sigma_2}(\mathbf{R}^d)}.$$

La preuve est identique à celle du Théorème précédent car il suffit de remarquer que $au - T_a u = T_u a + R(a, u)$. Par contre le résultat suivant est plus difficile.

**Théorème 10.12.** *Soit $r > 0$ un entier. Pour $a \in W^{r,\infty}(\mathbf{R}^d)$ l'application $u \mapsto au - T_a u$ s'étend en une application continue de $L^2(\mathbf{R}^d)$ dans $H^r(\mathbf{R}^d)$ et il existe $C > 0$ ne dépendant que de $r$ et $d$ telle que*

$$\|au - T_a u\|_{H^r(\mathbf{R}^d)} \leq C\|a\|_{W^{r,\infty}(\mathbf{R}^d)}\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}.$$

On renvoie au livre de Métivier (Théorème 5.2.8.) pour la démonstration.

On a aussi le résultat suivant.

**Théorème 10.13.** *1. Soit $s \geq 0$. Il existe $C > 0$ telle que*

prS2 (10.8) $$\|u_1 u_2\|_{H^s} \leq C\big(\|u_1\|_{H^s}\|u_2\|_{L^\infty} + \|u_1\|_{L^\infty}\|u_2\|_{H^s}\big).$$

*2. Soit $s, m \in ]0, +\infty[$ tels que $m \notin \mathbf{N}$. Il existe $C > 0$ telle que*

prZ2 (10.9) $$\|u_1 u_2\|_{H^s} \leq C\big(\|u_1\|_{L^\infty}\|u_2\|_{H^s} + \|u_2\|_{C_*^{-m}}\|u_1\|_{H^{s+m}}\big).$$

Les estimations du Théorème ci-dessus sont appelées douces car, comme on le voit, le membre de droite dépend linéairement des normes les plus grandes.

### 10.1.3 Le calcul symbolique

Voici résumé le principal résultat.

`theo:sc0` **Théorème 10.14.** *Soit* $0 < \rho \leq 1$.

(*i*) *Pour tout* $\mu \in \mathbf{R}$ *il existe* $C > 0$ *telle que pour tous* $a, b \in W^{\rho,\infty}(\mathbf{R}^d)$

`esti:quant2`
$$\begin{aligned} \|T_a T_b - T_{ab}\|_{H^\mu \to H^{\mu+\rho}} &\leq C(\|a\|_{W^{\rho,\infty}} \|b\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty} \|b\|_{W^{\rho,\infty}}), \\ \|[T_a, T_b]\|_{H^\mu \to H^{\mu+\rho}} &\leq C(\|a\|_{W^{\rho,\infty}} \|b\|_{L^\infty} + \|a\|_{L^\infty} \|b\|_{W^{\rho,\infty}}) \end{aligned} \tag{10.10}$$

(*ii*) *Soit* $a \in W^{\rho,\infty}(\mathbf{R}^d)$. *Notons* $(T_a)^*$ *l'adjoint de* $T_a$ *dans* $L^2(\mathbf{R}^d)$ *et par* $\overline{a}$ *le conjugé complexe de* $a$. *Alors pour tout* $\mu \in \mathbf{R}$ *il existe* $C > 0$ *(indépendante de* $a$*) telle que*

`esti:quant3`
$$\|(T_a)^* - T_{\overline{a}}\|_{H^\mu \to H^{\mu+\rho}} \leq C \|a\|_{W^{\rho,\infty}} \tag{10.11}$$

### 10.1.4 La paralinéarisation

**Théorème 10.15.** *Soit* $F \in C^\infty(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ *telle que* $F(0) = 0$. *Soit* $s > \frac{d}{2}$ *et notons* $\rho = s - \frac{d}{2} > 0$. *Alors pour* $u \in H^s(\mathbf{R}^d)$ *on peut écrire*

$$F(u) = T_{F'(u)} u + R(u), \quad R(u) \in H^{s+\rho}(\mathbf{R}^d)$$

Le résultat plus faible suivant est aussi utile.

**Théorème 10.16.** *Soit* $F \in C^\infty(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ *telle que* $F(0) = 0$. *Soit* $s \geq 0$ *et* $u \in L^\infty(\mathbf{R}^d) \cap H^s(\mathbf{R}^d)$. *Alors* $F(u) \in H^s(\mathbf{R}^d)$ *et il existe* $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ *ne dépendant que de* $F$ *telle que*

`F(u)`
$$\|F(u)\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \leq \mathcal{F}(\|u\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}) \|u\|_{H^s(\mathbf{R}^d)}. \tag{10.12}$$

## 10.2 Le calcul paradifferentiel général

`def:symboles` **Definition 10.17.** *Soit* $\rho \in [0, 1]$ *et* $m \in \mathbf{R}$. *On notera* $\Gamma^m_\rho$ *l'espace des fonctions* $a = a(x, \xi)$ *sur* $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ *qui sont* $C^\infty$ *en* $\xi$ *et telles que, pour tout* $\alpha \in \mathbf{N}^d$ *et tout* $\xi \neq 0$, *la fonction* $x \mapsto D^\alpha_\xi a(x, \xi)$ *appartient à* $W^{\rho,\infty}(\mathbf{R}^d)$ *et il existe* $C_\alpha > 0$ *telle que, pour tout* $|\xi| \geq \frac{1}{2}$,

$$\|D^\alpha_\xi a(\cdot, \xi)\|_{W^{\rho,\infty}(\mathbf{R}^d)} \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

*On notera* $\dot{\Gamma}^m_\rho$ *le sous espace (de* $\Gamma^m_\rho$*) des symboles homogènes de degré* $m$ *en* $\xi$.

*Pour* $a \in \Gamma^m_\rho$ *on posera*

$$M^m_N(a) = \sup_{|\alpha| \leq N} \sup_{|\xi| \geq \frac{1}{2}} \left\| (1 + |\xi|)^{|\alpha| - m} D^\alpha_\xi a(\cdot, \xi) \right\|_{W^{\rho,\infty}(\mathbf{R}^d)}.$$

Etant donné un symbole $a \in \Gamma^m_\rho$ on définit l'opérateur paradifférentiel $T_a$ par la formule

def:para (10.13)
$$\widehat{T_a u}(\xi) = (2\pi)^{-d} \int \chi(\xi - \eta, \eta) \widehat{a}(\xi - \eta, \eta) \psi(\eta) \widehat{u}(\eta)\, d\eta.$$

où $\widehat{a}(\theta, \xi) = \int e^{-ix\cdot\theta} a(x, \xi)\, dx$ est la transformée de Fourier de $a$ par rapport à $x$, $\chi$ et $\psi$ sont deux fonctions $C^\infty$ de leurs arguments telles que

cond:psi (10.14)
$$\begin{gathered} \psi(\eta) = 0 \text{ si } |\eta| \leq \frac{1}{10}, \quad \psi(\eta) = 1 \text{ si } |\eta| \geq \frac{1}{5} \\ \chi(\theta, \xi) = 1 \text{ si } |\theta| \leq \varepsilon_1 |\eta|, \quad \chi(\theta, \xi) = 0 \text{ si } |\theta| \geq \varepsilon_2 |\eta|, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \end{gathered}$$

et
$$\left| D^\alpha_\theta D^\beta_\eta \chi(\theta, \eta) \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\eta|)^{-|\alpha| - |\beta|}, \forall (\theta, \eta) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d.$$

Un mot d'explication à propos de cette définition des opérateurs paradifférentiels. Supposons $a = a(x)$. Si dans l'intégrale du membre de droite de (10.13) il n'y avait ni $\chi$ ni $\psi$ on obtiendrait la convolution de $\widehat{a}$ par $\widehat{u}$ de sorte que $T_a u$ serait la multiplication de $a$ par $u$. Comme le support de $\chi$ est contenu dans l'ensemble $\{(\theta, \eta) : |\theta| \leq \varepsilon_2 |\eta|\}$ cela veut dire que dans un opérateur paradifférentiel on ne garde que les fréquences de $a$ plus petites que celles de $u$ et que d'autre part (à cause du $\psi$) on évite les petites fréquences de $u$. Un des avantages de cette définition réside dans l'analogue du Théorème 10.7 pour ces opérateurs à savoir qu'ils opérent sur tous les $H^s$ dès que $a \in L^\infty$ par rapport à $x$, ce que ne fait pas la multiplication usuelle.

Les principales proprietés du calcul symbolique des opérateurs paradifférentiels sont résumées dans le théorème suivant.

theo:sc1 **Théorème 10.18.** *Soit $m, m' \in \mathbf{R}$ et $\rho \in [0, 1]$.*

*(i) Soit $a \in \Gamma^m_0(\mathbf{R}^d)$. Pour tout $s \in \mathbf{R}$ l'opérateur $T_a$ est continu de $H^s(\mathbf{R}^d)$ dans $H^{s-m}(\mathbf{R}^d)$ et il existe une constante $C > 0$ (indépendante de $a$) telle que*

esti:quant1 (10.15)
$$\|T_a\|_{H^s \to H^{s-m}} \leq K M^m_0(a).$$

*(ii) Soit $a \in \Gamma^m_\rho(\mathbf{R}^d), b \in \Gamma^{m'}_\rho(\mathbf{R}^d)$. Alors pour tout $s \in \mathbf{R}$ l'opérateur $T_a T_b - T_{ab}$ est continu de $H^s(\mathbf{R}^d)$ dans $H^{s-m-m'+\rho}(\mathbf{R}^d)$ et il existe une constante $C > 0$ (indépendante de $a, b$) telle que*

esti:quant2 (10.16)
$$\|T_a T_b - T_{ab}\|_{H^\mu \to H^{\mu - m - m' + \rho}} \leq C(M^m_\rho(a) M^{m'}_0(b) + M^m_0(a) M^{m'}_\rho(b)).$$

*(iii) Soit $a \in \Gamma^m_\rho(\mathbf{R}^d)$. Notons $(T_a)^*$ l'adjoint de $T_a$ dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ et par $\overline{a}$ le conjugé complexe de $a$. Alors, pour tout $s \in \mathbf{R}$ l'opérateur $(T_a)^* - T_{\overline{a}}$ est continu de $H^s(\mathbf{R}^d)$ dans $H^{s-m+\rho}(\mathbf{R}^d)$ et il existe une constante $C > 0$ (indépendante de $a$) telle que*

esti:quant3 (10.17)
$$\|(T_a)^* - T_{\overline{a}}\|_{H^\mu \to H^{\mu - m + \rho}} \leq C M^m_\rho(a).$$

On utilisera dans ce texte des opérateurs paradifférentiels de régularité négative. On a donc besoin d'étendre la définition précédente des symboles.

**Definition 10.19.** *Pour $m \in \mathbf{R}$ et $\rho \in (-\infty, 0)$, $\Gamma_\rho^m(\mathbf{R}^d)$ est l'espace des distributions $a(x,\xi)$ sur $\mathbf{R}^d \times (\mathbf{R}^d \setminus 0)$, qui sont $C^\infty$ par rapport à $\xi$ et telles que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^d$ et tout $\xi \neq 0$, la fonction $x \mapsto \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$ appartient à $C_*^\rho(\mathbf{R}^d)$ et il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que,*

$$\forall\, |\xi| \geq \frac{1}{2}, \quad \left\|\partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi)\right\|_{C_*^\rho} \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}. \tag{10.18}$$

*Pour $a \in \Gamma_\rho^m$, on définit*

$$M_\rho^m(a) = \sup_{|\alpha| \leq 2(d+2)+|\rho|} \; \sup_{|\xi| \geq 1/2} \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha|-m} \partial_\xi^\alpha a(\cdot,\xi) \right\|_{C_*^\rho(\mathbf{R}^d)}. \tag{10.19}$$

## 10.3 Estimations de commutateurs

Soit $m \in \mathbf{N}, m \geq 1, \psi \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ telle que $\psi(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq \frac{1}{10}, \psi(\xi) = 1$ si $|\xi| \geq \frac{1}{5}$ et $\widetilde{h} \in C^\infty(\mathbf{S}^{d-1})$. On pose $b(\xi) = |\xi|^m \psi(\xi) \widetilde{h}\big(\frac{\xi}{|\xi|}\big)$.

commutateur **Lemme 10.20.** *Soit $a \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Il existe $C > 0$ indépendante de $a$ et $\widetilde{h}$ telle que*

$$\|[b(D), T_a]u\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq C \|\nabla_x a\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \|\widetilde{h}\|_{H^{d+2}(\mathbf{S}^{d-1})} \|u\|_{H^{m-1}(\mathbf{R}^d)}$$

*pour tout $u \in H^{m-1}(\mathbf{R}^d)$.*

*Démonstration.* Par définition on a $[b(D), T_a]u = \sum_{j \geq -1} [b(D), S_{j-3}(a)]\Delta_j u$. Comme (pour $j \geq 0$) les spectres de $S_{j-3}(V)\Delta_j u$ et $\Delta_j u$ sont contenus dans la couronne $C_j = \{\xi : \frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3\}$ on peut écrire

Schur0
$$[b(D), T_a]u = \sum_{j \geq -1} [b(D)\varphi_1(2^{-j}D), S_{j-3}(a)]\Delta_j u := \sum_{j \geq -1} w_j \tag{10.20}$$

où $\operatorname{supp} \varphi_1 \subset \{\xi : \frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4\}$. Posons $b_j(\xi) = b(\xi)\varphi_1(2^{-j}\xi)$. On a alors

$$w_j = (2\pi)^{-d} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} b_j(\xi) \big\{S_{j-3}(a)(y) - S_{j-3}(a)(x)\big\} \Delta_j u(y)\, dy\, d\xi.$$

Par conséquent on peut écrire,

Schur1
$$\begin{cases} w_j = (2\pi)^{-d} \displaystyle\int K_j(x,y) \Delta_j(y)\, dy, \quad \text{où} \\ K_j(x,y) = \displaystyle\int e^{i(x-y)\cdot\xi} b_j(\xi)\, d\xi \cdot \sum_{k=1}^d F_{jk}(x,y)(y_k - x_k), \\ F_{jk}(x,y) := \displaystyle\int_0^1 S_{j-3}\big(\partial_k a\big)(ty + (1-t)x)\, dt. \end{cases} \tag{10.21}$$

Notons qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $j \geq -1, k = 1, \ldots, d$ et $x, y \in \mathbf{R}^d$

est:Fjk
$$|F_{jk}(x,y)| \leq C \|\nabla_x a\|_{L^\infty}. \tag{10.22}$$

Comme $(y_k - x_k)e^{i(x-y)\cdot\xi} = (-D_{\xi_k})e^{i(x-y)\cdot\xi}$ en intégrant par parties il vient

$$K_j(x,y) = \sum_{k=1}^{d} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} D_{\xi_k} b_j(\xi)\, d\xi \cdot F_{jk}(x,y).$$

Comme $b_j(\xi) = \psi(\xi)h(\xi)\varphi_1(2^{-j}\xi)$ on a (pour $j \geq 0$) $D_{\xi_k}\psi(\xi)\varphi_1(2^{-j}\xi) = 0$. Alors

$$\begin{aligned} D_{\xi_k} b_j(\xi) &= \psi(\xi) D_{\xi_k}\{h(\xi)\varphi_1(2^{-j}\xi)\} = \psi(\xi)\{(D_{\xi_k}h)(\xi)\varphi_1(2^{-j}\xi) + 2^{-j}h(\xi)(D_{\xi_k}\varphi_1)(2^{-j}\xi)\} \\ &= 2^{j(m-1)}\psi(2^j\eta)\big(\varphi_1 D_{\xi_k}h + hD_{\xi_k}\varphi_1\big)(\eta) := 2^{j(m-1)}\psi(2^j\eta)G_k(\eta) \end{aligned}$$

si $\xi = 2^j\eta$, car $h$ est homogène de degré $m$. (Notons que $\operatorname{supp} G_k \subset \{\eta : \frac{1}{4} \leq |\eta| \leq 4\}$). Alors

$$K_j(x,y) = 2^{jd}2^{j(m-1)} \sum_{k=1}^{d} \widetilde{K}_{jk}(2^j(x-y))F_{jk}(x,y), \quad \widetilde{K}_{jk}(z) = \int e^{iz\cdot\eta}\psi(2^j\eta)G_k(\eta)\, d\eta.$$

D'après (10.22) on a

Schur2 (10.23)
$$\int |K_j(x,y)|\ dx + \int |K_j(x,y)|\ dy \leq 2^{j(m-1)}\|\nabla_x a\|_{L^\infty} \sum_{k=1}^{d} \int |\widetilde{K}_{jk}(z)|\, dz.$$

D'autre part pour $\alpha \in \mathbf{N}^d$ on peut écrire

$$z^\alpha \widetilde{K}_{jk}(z) = \int e^{iz\cdot\eta}\psi(2^j\eta)(-D_\eta)^\alpha G_k(\eta)\, d\eta + \sum_{\beta\neq 0} c_{\alpha\beta}2^{j|\beta|} \int e^{iz\cdot\eta}(D_\eta^\beta\psi)(2^j\eta)(D^{\alpha-\beta}G_k)(\eta)\, d\eta.$$

La première integrale est bornée par $C_{k,\alpha}\|\widetilde{h}\|_{H^{|\alpha|+1}(\mathbf{S}^{d-1})}$. Dans la seconde integrale, comme $\operatorname{supp}(D_\eta^\beta\psi) \subset \{\eta : \frac{1}{5} \leq |\eta| \leq \frac{1}{4}\}$ et $\operatorname{supp} G_k \subset \{\eta : \frac{1}{4} \leq |\eta| \leq 4\}$ on a $2^{j|\beta|} \leq C_\beta|\eta|^{-|\beta|} \leq C'_\beta$. La seconde intégrale est alors bornée par $C_{k,\alpha}\|\widetilde{h}\|_{H^{|\alpha|+1}(\mathbf{S}^{d-1})}$. Prenant $|\alpha| = d+1$ on obtient

est:Ktilde (10.24)
$$(1+|z|)^{d+1}|\widetilde{K}_{jk}(z)| \leq C\|\widetilde{h}\|_{H^{d+2}(\mathbf{S}^{d-1})}$$

où $C$ est indépendante de $j$ et $k$. D'après (10.21), (10.23), (10.24) et le lemme de Schur, il vient

$$\|w_j\|_{L^2} \leq C2^{j(m-1)}\|\nabla a\|_{L^\infty}\|\widetilde{h}\|_{H^{d+2}(\mathbf{S}^{d-1})}\|\Delta_j u\|_{L^2} \leq C'\|\nabla a\|_{L^\infty}\|\widetilde{h}\|_{H^{d+2}(\mathbf{S}^{d-1})}c_j\|u\|_{H^{m-1}}$$

où $(c_j) \in l^2$, ce qui termine la preuve du lemme. □

est:comm1 **Lemme 10.21.** *Soit $d \geq 1, s > 1 + \frac{d}{2}, 0 < \sigma < s - 1 - \frac{d}{2}$. Il existe $C > 0$ telle que*

$$\|[\langle D_x\rangle^\sigma, V]\cdot\nabla_x f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq C\|V\|_{H^s(\mathbf{R}^d)}\|f\|_{C_*^\sigma(\mathbf{R}^d)}$$

*pour tout $V \in H^s(\mathbf{R}^d)$ et tout $f \in C_*^\sigma(\mathbf{R}^d)$.*

*Démonstration.* On écrit $\|[\langle D_x\rangle^\sigma, V]\cdot\nabla_x f\|_{L^\infty} \leq I + II + III$ avec

$$I = \|[\langle D_x\rangle^\sigma, T_V]\cdot\nabla_x f\|_{L^\infty},\ II = \|(V - T_V)\cdot\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f\|_{L^\infty},\ III = \|\langle D_x\rangle^\sigma(V-T_V)\cdot\nabla_x f\|_{L^\infty}.$$

D'après le calcul symbolique paradifférentiel dans les Hölder, l'opérateur $[\langle D_x\rangle^\sigma, T_V]\cdot\nabla_x$ est d'ordre $\sigma$ et sa norme est majorée par $\|V\|_{W^{1,\infty}}$. Comme $s>1+\frac{d}{2}$ on a $H^s\subset W^{1,\infty}$ et donc

est:comm0 (10.25) $$I\leq C\|V\|_{H^s}\|f\|_{C^\sigma_*}.$$

Ensuite on a $(V-T_V)\cdot\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f=T_{\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f}V+R_1(\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f,V)=(1)+(2)$. On a

$$\|(1)\|_{L^\infty}\leq\sum_j\|S_j(\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f)\|_{L^\infty}\|\Delta_j V\|_{L^\infty},$$

$$\|S_j(\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f)\|_{L^\infty}\leq\sum_{k\leq j-1}\|\Delta_k((\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f)\|_{L^\infty}\leq C\sum_{k\leq j-1}2^{k(1+\sigma)}\|f\|_{L^\infty}\leq C'2^{j(1+\sigma)}\|f\|_{L^\infty}$$

de sorte que

$$\|(1)\|_{L^\infty}\leq C\sum_j 2^{j(1+\sigma-(s-\frac{d}{2}))}\|f\|_{L^\infty}\|V\|_{C_*^{s-\frac{d}{2}}}\leq C'\|f\|_{L^\infty}\|V\|_{H^s}$$

car $1+\sigma-s+\frac{d}{2}<0$. Ensuite

$$\begin{aligned}\|(2)\|_{L^\infty}&\leq C\sum_j\sum_{|k-j|\leq 1}\|\Delta_j(\nabla_x\langle D_x\rangle^\sigma f)\|_{L^\infty}\|\Delta_k V\|_{L^\infty}\leq C'\sum_j 2^{j(1+\sigma)}2^{-j(s-\frac{d}{2})}\|f\|_{L^\infty}\|V\|_{C_*^{s-\frac{d}{2}}}\\&\leq C''\|f\|_{L^\infty}\|V\|_{H^s}.\end{aligned}$$

On en déduit

est:comm1 (10.26) $$\|II\|_{L^\infty}\leq C\|V\|_{H^s}\|f\|_{L^\infty}.$$

On a ensuite,

$$\|III\|_{L^\infty}\leq\|(V-T_V)\cdot\nabla_x f\|_{W^{\sigma,\infty}}.$$

On a $(V-T_V)\nabla_x f=T_{\nabla_x f}V+R_2(\nabla_x f,V)=(3)+(4)$.

Tout d'abord $(3)=\sum_j S_{j-3}(\nabla_x f)\cdot\Delta_j(V):=\sum_j v_j$. Alors

$$\|v_j\|_{L^\infty}\leq\sum_{k\leq j-3}\|\Delta_k(\nabla_x f)\|_{L^\infty}\|\Delta_j(V)\|_{L^\infty}\leq C\sum_{k\leq j-3}2^k 2^{-j(s-\frac{d}{2})}\|V\|_{C_*^{s-\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^\infty}$$

d'où

$$2^{j\sigma}\|v_j\|_{L^\infty}\leq C'2^{-j(s-\frac{d}{2}-1-\sigma)}\|V\|_{C_*^{s-\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^\infty}\leq C''\|V\|_{C_*^{s-\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^\infty},$$

ce qui montre que

$$\|(3)\|_{C^\sigma_*}\leq C\|V\|_{H^s}\|f\|_{L^\infty}.$$

Enfin $(4)=\sum_k w_k$ où

$$w_k=\Delta_k\sum_j\sum_{|l-j|\leq 1}\Delta_j(\nabla_x f)\Delta_l(V)\approx\sum_{j\geq k+1}\Delta_k(\Delta_j(\nabla_x f)\Delta_j(V)).$$

Alors

$$\|w_k\|_{L^\infty}\leq\sum_{j\geq k+1}2^j 2^{-j(s-\frac{d}{2})}\|V\|_{C_*^{s-\frac{d}{2}}}\|f\|_{L^\infty}.$$

Par hypothèse il existe $\varepsilon > 0$ tel que $s - 1 - \frac{d}{2} > \sigma + \varepsilon$ et donc

$$\|w_k\|_{L^\infty} \leq 2^{-k\sigma} \sum_j 2^{-j\varepsilon} \|f\|_{L^\infty} \|V\|_{H^s}$$

ce qui montre que

$$\|(4)\|_{C^\sigma_*} \leq C \|V\|_{H^s} \|f\|_{L^\infty}$$

et donc que

est:comm2 (10.27) $$\|III\|_{L^\infty} \leq C \|V\|_{H^s} \|f\|_{L^\infty}.$$

Le leme résulte alors de (10.25), (10.26), (10.27). □

On prouve maintenant une estimation du commutateur entre un opérateur paradifférentiel $T_p$ et la dérivée convective $\partial_t + V \cdot \nabla_x$ qui fait intervenir une estimation de $\partial_t p + V \cdot \nabla_x p$ et non de $\nabla_{t,x} p$.

Lorsque $a$ and $u$ sont un symbole et une fonction dépendant de $t \in I$, on notera par $T_a u$ l'opérateur paradifférentiel spatial tel que pour tout $t \in I$, $(T_a u)(t) = T_{a(t)} u(t)$. Etant donné un symbole $a = a(t; x, \xi)$ dépendant du temps on utilisera la notation

$$\mathcal{M}^m_0(a) := \sup_{t \in [0,T]} \sup_{|\alpha| \leq 2(d+2)+|\rho|} \sup_{|\xi| \geq 1/2} \left\| (1 + |\xi|)^{|\alpha| - m} \partial^\alpha_\xi a(t; \cdot, \xi) \right\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}.$$

Si $p = p(t, x, \xi)$ est un symbole d'ordre $m$, on déduit directement du calcul symbolique des opérateurs paradifférentiels que

$$\left\| \left[ T_p, \partial_t + T_V \cdot \nabla_x \right] u \right\|_{H^\mu} \leq K \left\{ \mathcal{M}^m_0(\partial_t p) + \mathcal{M}^m_0(\nabla_x p) \|V\|_{W^{1,\infty}} \right\} \|u\|_{H^{\mu+m}}.$$

On montre ici que l'on peut remplacer cette estimation par une estimation qui ne fait intervenir que $\partial_t p + V \cdot \nabla_x p$.

lemm:Dt **Lemme 10.22.** *Soit $V \in C^0([0,T]; C^{1+\varepsilon}_*(\mathbf{R}^d))$ pour un $\varepsilon > 0$ et considérons un symbole $p = p(t, x, \xi)$ homogène en $\xi$ d'ordre $m$. Il existe alors $K > 0$ (indépendant de $p, V$) tel que pour tout $t \in [0,T]$ et tout $u \in C^0([0,T]; H^m(\mathbf{R}^d))$.*

comm:Dt (10.28) $$\begin{aligned} &\left\| \left[ T_p, \partial_t + T_V \cdot \nabla_x \right] u(t) \right\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \\ &\qquad \leq K \left\{ \mathcal{M}^m_0(p) \|V(t)\|_{C^{1+\varepsilon}_*} + \mathcal{M}^m_0(\partial_t p + V \cdot \nabla_x p) \right\} \|u(t)\|_{H^m(\mathbf{R}^d)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Posons $I = [0,T]$ et notons par $\mathcal{R}$ l'ensemble des opérateurs continus $R(t)$ de $H^m(\mathbf{R}^d)$ dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ dont la norme satisfait

$$\|R(t)\|_{\mathcal{L}(H^m(\mathbf{R}^d), L^2(\mathbf{R}^d))} \leq K \left\{ \mathcal{M}^m_0(p) \|V(t)\|_{C^{1+\varepsilon}_*} + \mathcal{M}^m_0(\partial_t p + V \cdot \nabla_x p) \right\}.$$

On commence par noter qu'il est suffisant de prouver que

6.13 (10.29) $$(\partial_t + V \cdot \nabla_x) T_p = T_p (\partial_t + T_V \cdot \nabla_x) + R, \quad R \in \mathcal{R}.$$

En effet par le Théorème 5.2.9 de [?], on a (pour $t$ fixé)

$$\|(V-T_V)\cdot\nabla_x T_p u\|_{L^2}\lesssim\|V\|_{W^{1,\infty}}\|T_p u\|_{L^2}\lesssim\|V\|_{W^{1,\infty}}\mathcal{M}_0^m(p)\|u\|_{H^m}$$

Ceci implique que $\big(V-T_V\big)\cdot\nabla_x T_p\in\mathcal{R}$.

La preuve de (10.29) se fera en trois étapes. Dans la première on prouvera (10.29) pour $m=0$ et $p=p(t,x)$. Dans la seconde on considérera le cas $p=a(t,x)h(\xi)$, où $h$ est homogène en $\xi$ d'ordre $m$. Enfin, en décomposant $p$ en une somme d'harmoniques sphériques, on montrera le cas général.

*Etape 1: Paraproduits, $m=0$, $p=p(t,x)$.* Dans ce cas $\mathcal{M}_0^0(p)=\|p\|_{L^\infty}$. On a

6.14 (10.30)
$$\begin{cases}\partial_t T_p u=T_{\partial_t p}u+T_p\partial_t u,\\ V\cdot\nabla_x T_p u=V\cdot T_{\nabla p}u+VT_p\cdot\nabla_x u=:A+B.\end{cases}$$

Décomposons $V=S_{j-3}(V)+S^{j-3}(V)$, avec

$$S_{j-3}(V)=\sum_{k\le j-2}\Delta_k V,\qquad S^{j-3}(V)=\sum_{k\ge j-3}\Delta_k V,$$

pour obtenir

6.15 (10.31)
$$\begin{cases}A=A_1+A_2,\\ A_1:=\displaystyle\sum_j S_{j-3}(V)S_{j-3}(\nabla p)\Delta_j u,\qquad A_2:=\sum_j S^{j-3}(V)S_{j-3}(\nabla p)\Delta_j u.\end{cases}$$

Considérons le terme $A_2$. Comme

$$\left\|S^{j-3}(V)\right\|_{L^\infty}\le\sum_{k\ge j-3}\|\Delta_k V\|_{L^\infty}\lesssim\sum_{k\ge j-3}2^{-k(1+\varepsilon)}\|V\|_{C_*^{1+\varepsilon}}\lesssim 2^{-j(1+\varepsilon)}\|V\|_{C_*^{1+\varepsilon}}$$

et $\|S_{j-3}(\nabla p)\|_{L^\infty}\lesssim 2^j\|p\|_{L^\infty}$, on obtient

6.16 (10.32)
$$\|A_2\|_{L^2}\lesssim\sum_j 2^{-j\varepsilon}\|V\|_{C_*^{1+\varepsilon}}\|p\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\lesssim\mathcal{M}_0^0(p)\|V\|_{C_*^{1+\varepsilon}}\|u\|_{L^2}.$$

Estimons maintenant $A_1=A_{11}+A_{12}$, où

6.17 (10.33)
$$\begin{cases}A_{11}:=\displaystyle\sum_j S_{j-3}\big\{S_{j-3}(V)\cdot\nabla_x p\big\}\Delta_j u,\\ A_{12}:=\displaystyle\sum_j\big\{\big[S^{j-3}(V),S_{j-3}\big]\nabla_x p\big\}\Delta_j u.\end{cases}$$

On écrit $S_{j-3}(V)=V-S^{j-3}(V)$, d'où

$$A_{11}=\sum_j S_{j-3}\big(V\cdot\nabla_x p\big)\Delta_j u-\sum_j S_{j-3}\big\{S^{j-3}(V)\cdot\nabla_x p\big\}\Delta_j u=T_{V\cdot\nabla_x p}u+I+II$$

où
$$I=-\sum_j\big(\nabla_x\cdot S_{j-3}\big\{S^{j-3}(V)p\big\}\big)\Delta_j u,\quad II=\sum_j S_{j-3}\big\{S^{j-3}(\nabla_x\cdot V)p\big\}\Delta_j u.$$
Alors
$$\begin{aligned}\|I\|_{L^2}&\lesssim\sum_j 2^j\left\|S^{j-3}(V)p\right\|_{L^\infty}\|\Delta_j u\|_{L^2}\\&\lesssim\sum_j 2^j2^{-j(1+\varepsilon)}\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\|p\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}\lesssim\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\|p\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$
De plus,
$$\|II\|_{L^2}\lesssim\sum_j\left\|S^{j-3}(\nabla_x V)\right\|_{L^\infty}\|p\|_{L^\infty}\|\Delta_j u\|_{L^2}\lesssim\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\|p\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}.$$
Par conséquent

6.18 (10.34) $$A_{11}=T_{V\cdot\nabla_x p}u+Ru,\quad R\in\mathcal{R}.$$

Pour estimer $A_{12}$ on note que l'on peut écrire
$$\big[S^{j-3}(V),S_{j-3}\big]\nabla_x p=\big[S^{j-3}(V),S_{j-3}\nabla_x\big]p+S_{j-3}\big(S^{j-3}(\nabla_x V)p\big).$$
Comme $S_{j-3}\partial_k=2^j\psi_1(2^{j-3}D)$ où $\psi_1\in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ on a
$$\|\big[S^{j-3}(V),S_{j-3}\nabla_x\big]p\|_{L^\infty}\le C\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\|p\|_{L^\infty}$$
qui découle des inegalités
$$2^j\|[a,\psi_1(2^{-j}(D)]p\|_{L^\infty}\le C\|\nabla_x a\|_{L^\infty}\|p\|_{L^\infty},\quad\|S^{j-3}(\nabla_x V)\|_{L^\infty}\le C\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}.$$
De plus on a
$$\|S_{j-3}\big(S^{j-3}(\nabla V)p\big)\|_{L^\infty}\le C\|\nabla_x V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\|p\|_{L^\infty}.$$
Il s'en suit que $A_{12}=Ru$ où $R\in\mathcal{R}$. Par conséquent on déduit de (10.33) et (10.34) que $A_1=T_{V\cdot\nabla_x p}u+Ru$ où $R$ in $\mathcal{R}$. Il résulte de (10.31) et (10.32) que $A=T_{V\cdot\nabla_x p}u+Ru$ avec $R\in\mathcal{R}$.

On estime maintenant le terme $B$ introduit dans (10.30). On écrit
$$\begin{aligned}B=V\cdot(T_p\nabla_x u)&=V\cdot\sum_j S_{j-3}(p)\nabla\Delta_j u\\&=\sum_j S_{j-3}(V)S_{j-3}(p)\Delta_j\nabla_x u+\sum_j S^{j-3}(V)S_{j-3}(p)\Delta_j\nabla_x u=:B_1+B_2.\end{aligned}$$
On a
$$\begin{aligned}\|B_2\|_{L^2}&\le\sum_j\left\|S^{j-3}(V)\right\|_{L^\infty}\|S_{j-3}(p)\|_{L^\infty}\|\Delta_j\nabla_x u\|_{L^2}\\&\lesssim\sum_j 2^{-j(1+\varepsilon)}\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}2^j\|p\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}.\end{aligned}$$

et donc $B_2 = Ru$ avec $R \in \mathcal{R}$. Pour traiter $B_1$, introduisons

6.25 (10.35) $$C := T_p T_V \cdot \nabla_x u = \sum_j S_{j-3}(p)\Delta_j \sum_k S_{k-3}(V)\cdot \nabla_x \Delta_k u.$$

Comme le spectre of $S_{k-3}(V)\cdot\nabla_x\Delta_k u$ est contenu dans $\{(3/8)2^k \le |\xi| \le (2+1/8)2^k\}$, le terme $\Delta_j(S_{k-3}(V)\cdot\nabla_x\Delta_k u)$ s'annule sauf si $|k-j|\le 3$ et dans ce cas on a $S_{k-3}(V) - S_{j-3}(V) = \pm\sum_{\ell=-3}^{3}\Delta_{\ell+j}V$; on peut donc écrire $C$ sous la forme

$$C = C_1 + C_2 = C_1 + \sum_j S_{j-3}(p)\Delta_j\big\{S_{j-3}(V)\cdot \sum_{|k-j|\le 3}\nabla_x\Delta_k u\big\}$$

où $C_1$ est donné par

$$C_1 = \sum_j S_{j-3}(p)\Delta_j \sum_{i=1}^{3}\sum_{\ell=-1}^{i-2}\big\{\Delta_{\ell+j}(V)\nabla_x\Delta_{i+j}(u) - \Delta_{\ell+j-i}(V)\nabla\Delta_{j-i}(u)\big\},$$

de sorte que

$$\|C_1\|_{L^2} \lesssim \sum_j \|p\|_{L^\infty}\, 2^{-j(1+\varepsilon)}\, \|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\, 2^j\, \|u\|_{L^2}\,,$$

ce qui implique que $C_1 = Ru$ avec $R\in\mathcal{R}$. Pour estimer $C_2$, on écrit comme précédemment $C_2 = C_{21} + C_{22}$ où

$$C_{21} := \sum_j S_{j-3}(p)\big[\Delta_j, S_{j-3}(V)\big]\cdot \sum_{|k-j|\le 3}\nabla_x\Delta_k u,$$
$$C_{22} := \sum_j S_{j-3}(p)S_{j-3}(V)\cdot\Delta_j \sum_{|k-j|\le 3}\nabla_x\Delta_k u.$$

Alors, utilisant la localisation en fréquences dans des couronnes dyadiques et la formule de Plancherel, on obtient

$$\|C_{21}\|^2_{L^2} \lesssim \sum_j \|p\|^2_{L^\infty}\, 2^{-2j}\, \|V\|^2_{W^{1,\infty}}\, 2^{2j} \sum_{|k-j|\le 3}\|\Delta_k u\|^2_{L^2} \lesssim \|p\|_{L^\infty}\,\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}\,\|u\|_{L^2}\,.$$

D'autre part comme $\Delta_j\sum_{|k-j|\le 3}\Delta_k \sim \Delta_j$, on a

$$C_{22} = \sum_j S_{j-3}(V)S_{j-3}(p)\nabla_x\Delta_j u = B_1.$$

Finalement on obtient

6.30 (10.36) $$B = T_p T_V\cdot\nabla_x u + Ru, \quad R\in\mathcal{R}.$$

On déduit de (10.30) et (10.36) que

6.31 (10.37) $$(\partial_t + V\cdot\nabla_x)T_p u = T_p(\partial_t + T_V\cdot\nabla_x)u + T_{\partial_t p + V\cdot\nabla_x p}u + Ru, \quad R\in\mathcal{R}.$$

Le calcul symbolique montre que $T_{\partial_t p + V\cdot\nabla_x p}\in\mathcal{R}$, ce qui prouve (10.29) et termine la preuve de la première étape.

*Etape 2 : Etape intermédiaire.*

On suppose maintenant que $p(t,x,\xi)=a(t,x)h(\xi)$ où $h(\xi)=|\xi|^m\,\widetilde{h}(\frac{\xi}{|\xi|})$ avec $\widetilde{h}\in C^\infty(\mathbf{S}^{d-1})$. Alors, par définition, on a $T_p=T_a\psi(D_x)h(D_x)$ où $\psi$ satisfait (10.14). On a

$$\big[T_p,\partial_t+T_V\cdot\nabla_x\big]=\big[T_a,\partial_t+T_V\cdot\nabla_x\big]\psi(D_x)h(D_x)+T_a\big[\psi(D_x)h(D_x),T_V\big]\cdot\nabla_x.$$

On affirme que la norme de $H^m$ dans $L^2$ de l'opérateur du membre de gauche est bornée par

est:comm (10.38) $$C\big(\|a\|_{L^\infty}\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}+\|\partial_t a+V\cdot\nabla_x a\|_{L^\infty}\big)\|\widetilde{h}\|_{H^{d+2}(\mathbf{S}^{d-1})}.$$

En effet la norme du premier terme du membre de droite est estimée d'après l'étape précédente par $C(\|a\|_{L^\infty}\|V\|_{C^{1+\varepsilon}_*}+\|\partial_t a+V\cdot\nabla_x a\|_{L^\infty})\|\widetilde{h}\|_{L^\infty(\mathbf{S}^{d-1})}$, tandis que celle du second terme est estimée par $C\|a\|_{L^\infty}\|\nabla_x V\|_{L^\infty}\|\widetilde{h}\|_{H^{d+2}(\mathbf{S}^{d-1})}$ d'après le Lemme 10.20.

*Etape 3 : Opérateurs paradifférentiels.*

Considérons une base orthonormale $(\widetilde{h}_\nu)_{\nu\in\mathbf{N}^*}$ de $L^2(\mathbf{S}^{d-1})$ composée de fonctions propres de l'opérateur (auto-adjoint) de Laplace–Beltrami, $\Delta_\omega=\Delta_{\mathbf{S}^{d-1}}$ sur $L^2(\mathbf{S}^{d-1})$, *i.e.* $\Delta_\omega\widetilde{h}_\nu=\lambda_\nu^2\widetilde{h}_\nu$. D'après la formule de Weyl on a $\lambda_\nu\sim c\nu^{\frac{1}{d}}$. Posant $h_\nu(\xi)=|\xi|^m\,\widetilde{h}_\nu(\omega)$, $\omega=\xi/|\xi|$, $\xi\neq 0$, on peut écrire

$$p(t,x,\xi)=\sum_{\nu\in\mathbf{N}^*}a_\nu(t,x)h_\nu(\xi)\quad\text{où}\quad a_\nu(t,x)=\int_{\mathbf{S}^{d-1}}p(t,x,\omega)\overline{\widetilde{h}_\nu(\omega)}\,d\omega.$$

Comme

$$\begin{aligned}\lambda_\nu^{2k}a_\nu(t,x)&=\int_{\mathbf{S}^{d-1}}\Delta_w^k p(t,x,\omega)\overline{\widetilde{h}_\nu(\omega)}\,d\omega,\\ \lambda_\nu^{2k}(\partial_t+V\cdot\nabla_x)a_\nu(t,x)&=\int_{\mathbf{S}^{d-1}}\Delta_w^k(\partial_t+V\cdot\nabla_x)p(t,x,\omega)\overline{\widetilde{h}_\nu(\omega)}\,d\omega,\end{aligned}$$

en prenant $k=d+2$ on obtient

6.33 (10.39) $$\begin{aligned}\sup_{t\in I}\|a_\nu(t,\cdot)\|_{L^\infty}&\le C\lambda_\nu^{-2(d+2)}\mathcal{M}_0^m(p),\\ \sup_{t\in I}\|(\partial_t+V\cdot\nabla_x)a_\nu(t,\cdot)\|_{L^\infty}&\le C\lambda_\nu^{-2(d+2)}\mathcal{M}_0^m(\partial_t p+V\cdot\nabla_x p).\end{aligned}$$

En outre, il existe une constante positive $K$ telle que pour tout $\nu\ge 1$,

6.34 (10.40) $$\big\|\widetilde{h}_\nu\big\|_{H^{d+2}(\mathbf{S}^{d-1})}\le C\lambda_\nu^{d+2}.$$

On a

$$\|[\partial_t+T_V\cdot\nabla,T_p]\,u\|_{L^2}\le\sum_{\nu\in\mathbf{N}^*}\|[\partial_t+T_V\cdot\nabla,T_{a_\nu h_\nu}]\,u\|_{L^2}.$$

Utilisant (10.38) pour tout $\nu\ge 1$ et les estimations (10.39), (10.40), on obtient (10.28) car

$$\sum_\nu\lambda_\nu^{d+2}\lambda_\nu^{-2(d+2)}\le C\sum_\nu\nu^{-1-\frac{2}{d}}<+\infty.$$

Cela termine la preuve du lemme. □

On a aussi un analogue du Lemme 10.22 dans les espaces de Sobolev qui peut être prouvé par la même méthode.

lemm:Dt1 **Lemme 10.23.** *Soit $s > 1 + d/2$ et $V \in C^0([0,T]; H^s(\mathbf{R}^d))$. Il existe $K > 0$ telle que pour tout symbole $p = p(t,x,\xi)$ homogene in $\xi$ d'ordre $m \in \mathbf{R}$ et tout $u \in C^0([0,T]; H^{s+m}(\mathbf{R}^d))$,*

$$\begin{aligned}&\left\| \left[ T_p, \partial_t + T_V \cdot \nabla_x \right] u(t) \right\|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \\ &\qquad\qquad \leq K \left\{ \mathcal{M}_0^m(p) \left\| V(t) \right\|_{H^s} + \mathcal{M}_0^m(\partial_t p + V \cdot \nabla_x p) \right\} \left\| u(t) \right\|_{H^{s+m}(\mathbf{R}^d)} .\end{aligned}$$

## 10.4 Un lemme d'interpolation

lions **Lemme 10.24.** *Soit $J = (-1, 0)$ et $s \in \mathbf{R}$. Soit $f \in L^2_z(J, H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$ telle que $\partial_z f \in L^2_z(J, H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$. Alors $f \in C^0([-1,0], H^s(\mathbf{R}^d))$ et il existe $C > 0$ (indépendante de $f$) telle que*

$$\sup_{z \in [-1,0]} \| f(z, \cdot) \|_{H^s(\mathbf{R}^d)} \leq C \big( \| f \|_{L^2_z(J, H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))} + \| \partial_z f \|_{L^2_z(J, H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))} \big).$$

*Démonstration.* En travaillant avec $(I - \Delta_x)^{\frac{s}{2}} f$ on se ramène au cas où $s = 0$. Ensuite si $J$ est un intervalle de $\mathbf{R}$ on posera

$$W(J) = \{ f \in L^2_z(J, H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)) : \partial_z f \in L^2_z(J, H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)) \}.$$

que l'on muni de la norme naturelle.

Etape 1: on prouve le lemme lorsque $J = \mathbf{R}$. Il est classique que $C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$ est dense dans $W(\mathbf{R})$. Si $v \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$ il est facile de voir que l'application $z \mapsto \| v(z, \cdot) \|^2_{L^2(\mathbf{R}^d)}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que

$$\frac{d}{dz} \| v(z, \cdot) \|^2_{L^2(\mathbf{R}^d)} = 2 \mathrm{Re} \Big( v(z, \cdot), \partial_z v(z, \cdot) \Big)_{L^2(\mathbf{R}^d)}.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dz} \| v(z, \cdot) \|^2_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq C \| v(z, \cdot) \|_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)} \| \partial_z v(z, \cdot) \|_{H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)}.$$

Comme $v$ est à support compact en $z$ il existe $A > 0$ tel que $v(z, \cdot)$ est nulle pour $z \leq -A$. En intégrant l'inégalité ci-dessus entre $-A$ et $z \in \mathbf{R}$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

est:W (10.41)
$$\sup_{z \in \mathbf{R}} \| v(z, \cdot) \|_{L^2(\mathbf{R})} \leq C \| v \|^{\frac{1}{2}}_{L^2_z(\mathbf{R}, H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))} \| \partial_z v \|^{\frac{1}{2}}_{L^2_z(\mathbf{R}, H^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))} \leq C \| v \|_{W(\mathbf{R})}.$$

Soit maintenant $u \in W(\mathbf{R})$ et $(u_j)$ une suite de $C_0^\infty(\mathbf{R})$ qui converge vers $u$ dans $W(\mathbf{R})$. D'après l'inégalité (10.41) appliquée à $u_j - u_k$ on voit que la suite $(u_j)$ est de Cauchy dans $L^\infty(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^d))$. Cet espace étant complet elle converge vers un élement $\widetilde{u} \in L^\infty(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^d))$. Les $u_j$ étant continus en $z$ et la convergence étant uniforme sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ on a $\widetilde{u} \in C^0(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^d))$. Enfin, les convergences dans $W(\mathbf{R})$ et $L^\infty(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^d))$ impliquant la convergence distribution, on a $u = \widetilde{u}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d)$. On peut alors passer à la limite dans (10.41) pour obtenir la même inegalité pour $u$.

Etape 2: $J = (0, +\infty)$. Si $u \in W(J)$ il existe $\widetilde{u} \in W(\mathbf{R})$ telle que $u = \widetilde{u}$ pour $z \in (0, +\infty)$ et $\|\widetilde{u}\|_{W(\mathbf{R})} \sim \|u\|_{W(0,+\infty)}$. Si $u$ est régulière il s'agit du prolongement par parité i.e.

$$\widetilde{u}(z, \cdot) = u(z, \cdot) \text{ si } z > 0, \quad \widetilde{u}(z, \cdot) = u(-z, \cdot) \text{ si } z < 0.$$

Sinon on raisonne par densité des fonctions régulières. L'étape 1. implique que $\widetilde{u} \in C^0(\mathbf{R}, L^2(\mathbf{R}^d))$; par définition $u \in C^0([0, +\infty), L^2(\mathbf{R}^d))$ et on une estimation analogue à (10.41) pour $u$. Ceci est évidemment valable pour $J = (a, +\infty)$ ou $J = (-\infty, b)$.

Etape 3. $J = (-1, 0)$. Il existe $\chi_j \in C^\infty(\mathbf{R}), j = 1, 2$ telles que $\operatorname{supp} \chi_1 \subset (-\infty, -\frac{1}{4}]$, $\operatorname{supp} \chi_2 \subset [-\frac{3}{4}, +\infty)$ et $\chi_1(z) + \chi_2(z) = 1$ sur $(-1, 0)$. Soit $u \in W(J)$. On écrit $u = u_1 + u_2$ où $u_j(z, \cdot) = \chi_j(z) u(z, \cdot), j = 1, 2$. Il est facile de voir que $u_1 \in W((-1, +\infty))$ et $u_2 \in W((-\infty, 0))$. D'après l'étape 2 on a $u_1 \in C^0([-1, +\infty), L^2(\mathbf{R}^d)) \subset C^0([-1, 0], L^2(\mathbf{R}^d)), u_2 \in C^0((-\infty, 0], L^2(\mathbf{R}^d)) \subset C^0([-1, 0] L^2(\mathbf{R}^d))$ et donc $u \in \subset C^0([-1, 0], L^2(\mathbf{R}^d))$. Enfin, pour $z \in [-1, 0]$ on peut écrire

$$\begin{aligned} \|u(z, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} &\leq \|u_1(z, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} + \|u_2(z, \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^d))} \\ &\leq C\big(\|u_1\|_{W((-1,+\infty))} + \|u_2\|_{W((-\infty,0))}\big) \\ &\leq C' \|u\|_{W((-1,0))} \end{aligned}$$

car $u_1$ est nulle pour $z \geq 0$ et $u_2$ est nulle pour $z \leq -1$ et que $u_j = \chi_j u$. □

## 10.5 Estimations de solutions d'équations de transport

estclass **Proposition 10.25.** *Soit $I = [0, T]$, $s > 1 + \frac{d}{2}$ et considérons le problème de Cauchy*

transport (10.42)
$$\begin{cases} \partial_t u + V \cdot \nabla_x u = f, \quad t \in I, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

*On a alors les estimations suivantes.*

eq.i (10.43)
$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} + \int_0^t \|f(\sigma, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)} d\sigma.$$

*Il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

eq.ii (10.44)
$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq \mathcal{F}\big(\|V\|_{L^1(I; W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d))}\big)\big(\|u_0\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} + \int_0^t \|f(t', \cdot)\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}\, dt'\big).$$

*et pour $\sigma \in [0, s]$ il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ croissante telle que*

eq.iii (10.45)
$$\|u(t)\|_{H^\sigma(\mathbf{R}^d)} \leq \mathcal{F}\big(\|V\|_{L^1(I; H^s(\mathbf{R}^d))}\big)\big(\|u_0\|_{H^\sigma(\mathbf{R}^d)} + \int_0^t \|f(t', \cdot)\|_{H^\sigma(\mathbf{R}^d)}\, dt'\big).$$

## 10.6 Solutions d'équations paraboliques

On introduit des espaces utiles dans la suite.

Xs **Definition 10.26.** *Soit* $J = (z_0, z_1) \subset \mathbf{R}$ *et* $\sigma \in \mathbf{R}$. *On pose*

$$X^\sigma(J) = L^\infty(J, H^\sigma(\mathbf{R}^d)) \cap L^2(J, H^{\sigma+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)),$$
$$Y^\sigma(J) = L^1(J, H^\sigma(\mathbf{R}^d)) + L^2(J, H^{\sigma-\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d))$$

que l'on munit de leurs normes naturelles.

parabolique **Lemme 10.27.** *Soit* $r \in \mathbf{R}, \rho > 0, J = [z_0, z_1]$ *et soit* $p \in \Gamma^1_\rho(\mathbf{R}^d \times J)$ *tel qu'il existe* $c > 0$ *satisfaisant*

$$(Re\, p)(x, z, \xi) \geq c|\xi|.$$

*Alors pour tout* $f \in Y^r(J)$ *et* $w_0 \in H^r(\mathbf{R}^d)$ *il existe* $w \in X^r(J)$ *solution de l'équation parabolique*

eq:parabo (10.46)
$$\partial_z w + T_p w = f, \quad w|_{z=0} = w_0$$

*satisfaisant*

$$\|w\|_{X^r(J)} \leq K\big\{\|w_0\|_{H^r} + \|f\|_{Y^r(J)}\big\}$$

*où* $K$ *est une constante ne dépendant que de* $r, \rho, c$ *et* $\mathcal{M}^1_\rho(p)$. *De plus cette solution est unique dans* $X^s(J)$ *pour tout* $s \in \mathbf{R}$.

*Démonstration.* Notons $\big(\cdot,\cdot\big)_{H^r}$ le produit scalaire dans $H^r(\mathbf{R}^d)$. Soit $\delta > 0$ et $F_1, F_2$ telles que $f = F_1 + F_2$ et

$$\|F_1\|_{L^1(J,H^r)} + \|F_2\|_{L^2(J,H^{r-\frac{1}{2}})} \leq \|f\|_{Y^r(J)} + \delta.$$

Considérons pour $\varepsilon > 0$ l'équation

weps (10.47)
$$\partial_z w_\varepsilon + \varepsilon(-\Delta + Id)w_\varepsilon + T_p w_\varepsilon = f \quad w_\varepsilon|_{z=0} = w_0.$$

Les méthodes usuelles pour les équations paraboliques montrent que pour tout $z_1 > z_0$ cette équation a une unique solution $w_\varepsilon \in C^{(}[z_0, z_1], H^r) \cap L^2((z_0, z_1), H^{r+1})$. Pour passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ nous devons établir des estimations à priori uniformes en $\varepsilon$.

Faisant le produit scalaire dans $H^r$ de l'équation avec $w_\varepsilon(z)$ on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\|w_\varepsilon(z)\|^2_{H^r} + \varepsilon\|w_\varepsilon(z)\|^2_{H^{r+1}} + \mathrm{Re}\big(T_p w_\varepsilon(z), w_\varepsilon(z)\big)_{H^r}$$
$$\leq \|F_1(z)\|_{H^r}\|w_\varepsilon(z)\|_{H^r} + \|F_1(z)\|_{H^{r-\frac{1}{2}}}\|w_\varepsilon(z)\|_{H^{r+\frac{1}{2}}}.$$

L'inégalité de Garding (cf.Metivier Section 6.3.2.) montre qu'il existe deux constantes positives $C_1, C_2$ ne dépendant que de $\mathcal{M}^1_\rho(p)$ telles que pour tout $z$ fixé

$$\mathrm{Re}\big(T_p w_\varepsilon(z), w_\varepsilon(z)\big)_{H^r} + C_1\|w_\varepsilon(z)\|^2_{H^{r+\frac{1-\rho}{2}}} \geq C_2\|w_\varepsilon(z)\|^2_{H^{r+\frac{1}{2}}}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\|w_\varepsilon(z)\|_{H^r}^2+\varepsilon\|w_\varepsilon(z)\|_{H^{r+1}}^2+C_2\|w_\varepsilon(z)\|_{H^{r+\frac12}}^2$$
$$\le \|F_1(z)\|_{H^r}\|w_\varepsilon(z)\|_{H^r}+\|F_2(z)\|_{H^{r-\frac12}}\|w_\varepsilon(z)\|_{H^{r+\frac12}}+C_1\|w_\varepsilon(z)\|_{H^{r+\frac{1-\rho}{2}}}^2.$$

Intégrant en $z$ on obtient pour tout $z\in[z_0,z_1]$ que la quantité

$$A(z):=\frac12\big\{\|w_\varepsilon(z)\|_{H^r}^2-\|w_0\|_{H^r}^2\big\}+\varepsilon\int_{z_0}^{z}\|w_\varepsilon(z')\|_{H^{r+1}}^2\,dz'+C_2\int_{z_0}^{z}\|w_\varepsilon(z')\|_{H^{r+\frac12}}^2\,dz'$$

est majorée par

$$B:=\|F_1\|_{L^1(J,H^r)}\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(J,H^r)}+\|F_2\|_{L^2(J,H^{r-\frac12})}\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac12})}+C_1\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac{1-\rho}{2}})}^2.$$

Comme

$$\boxed{\texttt{est:B}}\quad (10.48)\qquad B\le 4\|F_1\|_{L^1(J,H^r)}^2+\frac{1}{16}\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(J,H^r)}^2$$
$$\frac{1}{C_2}\|F_2\|_{L^2(J,H^{r-\frac12})}^2+\frac{C_2}{16}\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac12})}^2+C_1\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac{1-\rho}{2}})}^2$$

et

$$\frac12\big\{\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(J,H^r)}^2-\|w_0\|_{H^r}^2\big\}+C_2\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac12})}^2\le\sup_{z\in J}A(z)\le B$$

on peut absorber les deuxième et quatrième termes du membre de droite de l'inégalité (10.48) et en déduire qu'il existe $C_3>0$ indépendante de $\varepsilon$ telle que

$$\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(J,H^r)}^2+C_2\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac12})}^2\le C_3\big\{\|w_0\|_{H^r}^2+(\|f\|_{Y^r(J)}+\delta)^2+\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac{1-\rho}{2}})}^2\big\}.$$

Pour éliminer le dernier terme du membre de droite on remarque que le membre de gauche contrôle, par interpolation, la quantité $\|w_\varepsilon\|_{L^p(J,H^{r+\frac{1-\rho}{2}})}^2$ pour $p=\frac{2}{1-\rho}>2$. Utilisant l'inégalité de Hölder en $z$ on en déduit qu'il existe $\nu>0$ tel que si $|J|=|z_0-z_1|\le\nu$ on a, en faisant tendre $\delta$ vers zéro,

$$\|w_\varepsilon\|_{L^\infty(J,H^r)}^2+C_2\|w_\varepsilon\|_{L^2(J,H^{r+\frac12})}^2\le C_4\big\{\|w_0\|_{H^r}^2+\|f\|_{Y^r(J)}^2\big\}.$$

On peut alors itérer cette estimation sur $[z_0+\nu,z_0+2\nu],\dots$ pour éliminer la condition $|J|\le\nu$. En utilisant l'équation on obtient le fait que la suite $(w_\varepsilon)$ est bornée dans l'espace

$$C^0(\overline{J},H^r)\cap L^2(J,H^{r+\frac12})\cap C^1(J,H^{r-2}).$$

D'après le Théorème d'Ascoli il existe une sous suite qui converge dans l'espace $C^0(\overline{J},H^{r-\mu})\cap L^2(J,H^{r+\frac12-\mu})$, $\mu>0$, vers une fonction $w\in L^2(J,H^{r+\frac12})$ qui est une solution de l'équation (10.46). De plus le calcul précédent avec $\varepsilon=0$ montre que lorsque $|J|\le\nu$ (et ensuite dans le cas général en itérant) on a

$$\|w\|_{L^\infty(J,H^r)}^2+C_2\|w\|_{L^2(J,H^{r+\frac12})}^2\le C_4\big\{\|w_0\|_{H^r}^2+\|f\|_{Y^r(J)}^2\big\}.$$

Cela termine la partie existence du Lemme 10.27 ainsi que l'estimation. La partie unicité est analogue. $\square$

## 10.7 Continuité du noyau de Poisson

Le cas des espaces de Sobolev est aisé.

isson:sobolev **Théorème 10.28.** *Soit $I=(0,1), d\geq 1$. Alors pour tout $s\in \mathbf{R}$ l'application $u\mapsto e^{-z\langle D_x\rangle}u$ est continue de $H^s(\mathbf{R}^d)$ dans $L^2_z(I,H^{s+\frac12}(\mathbf{R}^d))$.*

*Démonstration.* Pour $u\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{\mathbf{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s+1}e^{-2z\langle\xi\rangle}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi\,dz &= \int_{\mathbf{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s+1}|\widehat{u}(\xi)|^2\Big(\int_0^1 e^{-2z\langle\xi\rangle}\,dz\Big)\,d\xi\\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}$$

□

Le cas des espaces de Hölder-Zygmund est traité par le résultat suivant.

oisson:holder **Théorème 10.29.** *Soit $I=(0,1), d\geq 1$ et $0<\mu<\frac12$. Alors pour tout $\alpha\in\mathbf{R}$ l'application $u\mapsto e^{-z\langle D_x\rangle}u$ est continue de $C^\alpha_*(\mathbf{R}^d)$ dans $L^2_z(I,C^{\alpha+\mu}_*(\mathbf{R}^d))$.*

On a

def (10.49)
$$\|e^{-z\langle D_x\rangle}u\|^2_{L^2_z(I,C^{\alpha+\mu}_*)}=\int_0^1\big(\sup_{j\geq -1}2^{j(\alpha+\mu)}\|\Delta_j e^{-z\langle D_x\rangle}u\|_{L^\infty}\big)^2\,dz.$$

Le théorème sera une conséquence du résultat suivant.

achapeau **Lemme 10.30.** *Soit $a(\xi)=z^\mu\langle\xi\rangle^\mu e^{-z\langle\xi\rangle}$. Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $C_\varepsilon>0$ telle que*

$$\|\widehat{a}\|_{L^1(\mathbf{R}^d)}\leq C_\varepsilon z^{-\varepsilon}$$

*pour tout $z\in(0,1)$.*

Montrons tout d'abord comment ce lemme implique le théorème. On écrit

$$\begin{aligned}\|\Delta_j e^{-z\langle D_x\rangle}u\|_{L^\infty}&=z^{-\mu}\|z^\mu\langle D_x\rangle^\mu e^{-z\langle D_x\rangle}\langle D_x\rangle^{-\mu}\Delta_j u\|_{L^\infty}=z^{-\mu}\|a(D_x)\langle D_x\rangle^{-\mu}\Delta_j u\|_{L^\infty}\\ &=z^{-\mu}\|\widehat{a}\star\langle D_x\rangle^{-\mu}\Delta_j u\|_{L^\infty}\leq z^{-\mu}\|\widehat{a}\|_{L^1}\|\langle D_x\rangle^{-\mu}\Delta_j u\|_{L^\infty}\\ &\leq C_\varepsilon z^{-\mu-\varepsilon}2^{-j(\mu+\alpha)}\|u\|_{C^\alpha_*}\end{aligned}$$

et le résultat découle de la formule (10.49) si $\varepsilon$ est choisi tel que $\mu+\varepsilon<\frac12$.

*Démonstration du Lemme 10.30.* Pour $\alpha\in\mathbf{N}^d$ on a $x^\alpha\widehat{a}=\widehat{D^\alpha_\xi a}$. On voit facilement que $|D^\alpha_\xi\langle\xi\rangle^\mu|\leq C_\alpha\langle\xi\rangle^{\mu-|\alpha|}$. Ensuite nous allons montrer que pour $\alpha\in\mathbf{N}^d$ on a

Faa (10.50)
$$|D^\alpha_\xi e^{-z\langle\xi\rangle}|\leq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}e^{-\frac12 z\langle\xi\rangle}.$$

En effet cela résulte de la formule de Faa-di-Bruno appliquée à $\varphi(t) = e^{-t}$ et $u(\xi) = z\langle\xi\rangle$. Pour $\alpha \neq 0$ $D_\xi^\alpha\big(\varphi(u(\xi))$ est une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$A := \varphi^{(k)}(u(\xi)) \prod_{j=1}^{s} \big(D_\xi^{l_j} u(\xi)\big)^{k_j} \quad \text{où} \quad 1 \leq k \leq |\alpha|, \sum_{j=1}^{s} k_j = k, \sum_{j=1}^{s} k_j l_j = \alpha.$$

Comme $|D^{l_j} u(\xi)| \leq Cz\langle\xi\rangle^{1-|l_j|}$ la quantité $A$ est majorée par $Cz^k\langle\xi\rangle^k e^{-z\langle\xi\rangle}\langle\xi\rangle^{-\alpha}$, ce qui prouve (10.50). On déduit alors de (10.50) que

est:a
$$|D_\xi^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha z^\mu \langle\xi\rangle^{\mu-|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}z\langle\xi\rangle}. \tag{10.51}$$

On montre ensuite que

x>1
$$|x|^{d+1} |\widehat{a}(x)| \leq C, \quad |x| \geq 1 \tag{10.52}$$

où $C$ est indépendante de $z$.

Cela résulte du fait que $|x^\alpha \widehat{a}(x)| \leq \int |D_\xi^\alpha a(\xi|\, d\xi$ et de l'estimation $|D_\xi^\alpha a(\xi)| \leq C_\alpha\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$ pour $|\alpha| = d+1$ qui résulte de (10.51).

On montre enfin que pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$

x<1
$$|x|^{d-\varepsilon} |\widehat{a}(x)| \leq C_\varepsilon z^{-\varepsilon}, \quad |x| \leq 1 \tag{10.53}$$

où $C_\varepsilon$ est indépendante de $z$, ce qui, compte tenu de (10.52), terminera la preuve du lemme.

Pour cela on commence par écrire $z\langle\xi\rangle = (z^2 + z^2|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$. Ensuite d'après (10.51) on a

$$|x^\alpha \widehat{a}(x)| \leq C_\alpha z^{|\alpha|} \int (z^2 + z^2|\xi|^2)^{\frac{\mu-|\alpha|}{2}} e^{-\frac{1}{2}(z^2+z^2|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}}\, d\xi.$$

Posons $z\xi = \eta$. On a $d\xi = z^{-d} d\eta$ et donc, en notant $\langle z,\eta\rangle = (z^2 + |\eta|^2)^{\frac{1}{2}}$, on obtient

est:a2
$$|x^\alpha \widehat{a}(x)| \leq C_\alpha z^{|\alpha|-d} \int \langle z,\eta\rangle^{\mu-|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}\langle z,\eta\rangle}\, d\eta. \tag{10.54}$$

Nous allons montrer que pour $|\alpha| = d$ et $|\alpha| = d-1$ on a

est:int
$$\int \langle z,\eta\rangle^{\mu-|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}\langle z,\eta\rangle}\, d\eta \leq M, \tag{10.55}$$

où $M$ est indépendant de $z$.

En effet on note tout d'abord que, puisque $z \in (0,1)$, on a $|\eta| \leq \langle z,\eta\rangle \leq \langle\eta\rangle$. On en déduit que

$$\int_{|\eta|\geq 1} \langle z,\eta\rangle^{\mu-|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}\langle z,\eta\rangle}\, d\eta \leq \int_{|\eta|\geq 1} e^{-\frac{1}{3}|\eta|}\, d\eta = M_0 < +\infty.$$

Ensuite si $1 \leq |\alpha| \leq d$ on a

$$\int_{|\eta|\leq 1} \langle z,\eta\rangle^{\mu-|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}\langle z,\eta\rangle}\, d\eta \leq \int_{|\eta|\leq 1} \frac{d\eta}{|\eta|^{|\alpha|-\mu}} = M_1 < +\infty$$

et si $|\alpha| = 0$ (si $d = 1$) on a

$$\int_{|\eta|\leq 1} \langle z, \eta\rangle^{\mu} e^{-\frac{1}{2}\langle z,\eta\rangle}\, d\eta \leq M_2 < +\infty,$$

où $M_2$ est indépendante de $z \in (0,1)$.

En utilisant alors (10.54) et (10.55) on obtient

$$|x^\alpha \widehat{a}(x)| \leq C \text{ si } \quad |\alpha| = d, \quad \text{et} \quad |x^\alpha \widehat{a}(x)| \leq C|z|^{-1}\text{si} \quad |\alpha| = d-1.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$

$$|x|^{d-\varepsilon}|\widehat{a}(x)| \leq C_\varepsilon z^{-\varepsilon}, \quad |x| \leq 1,$$

ce qui prouve (10.53). □

Dans le cas du symbole $e^{-z\langle\xi\rangle}$ on a une estimation plus précise de sa transformée de Fourier. En effet nous avons le résultat suivant.

fourier:a **Proposition 10.31.** *Soit $z \in (0,1)$ et $a(\xi) = e^{-z\langle\xi\rangle}$. Il existe $C > 0$ indépendante de $z$ telle que*

$$|\widehat{a}(x)| \leq C z^{-d}\big(1 + \frac{|x|^2}{z^2}\big)^{-\frac{d+1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d.$$

oro:fourier:a **Corollaire 10.32.** *Il existe $C > 0$ indépendante de $z$ telle que*

$$\|\widehat{a}\|_{L^1(\mathbf{R}^d)} \leq C.$$

On utilisera le lemme suivant.

eg1 **Lemme 10.33.** *Pour $\beta > 0$ on a*

$$\begin{aligned} &(i) \quad e^{-\beta} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} \frac{e^{i\beta t}}{1+t^2}dt \\ &(ii) \quad e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}}\, du. \end{aligned} \tag{10.56}$$

Supposons un instant ce lemme prouvé et montrons comment il implique la proposition.

*Démonstration de la Proposition 10.31.* On peut écrire d'après le lemme avec $\beta = z\langle\xi\rangle$

$$\widehat{a}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-ix\cdot\xi}\Big(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{z^2\langle\xi\rangle^2}{4u}}\, du\Big)\, d\xi.$$

En utilisant le Théorème de Fubini il vient

$$\widehat{a}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{z^2}{4u}}\Big(\int e^{-ix\cdot\xi} e^{-\frac{z^2|\xi|^2}{4u}}\, d\xi\Big)\, du$$

En utilisant le fait que

eg0 (10.57) $$\int e^{-ix\cdot\xi}e^{-a|\xi|^2}d\xi = \big(\frac{\pi}{a}\big)^{\frac{d}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4a}}, \quad a=\frac{z^2}{4u},$$

il vient
$$\widehat{a}(x) = \pi^{\frac{d-1}{2}}2^d z^{-d}\int_0^{+\infty} u^{\frac{d-1}{2}}e^{-u}e^{-\frac{z^2}{4u}}e^{-\frac{u}{z^2}|x|^2}\,du$$

d'où
$$|\widehat{a}(x)| \leq C_d z^{-d}\int_0^{+\infty} u^{\frac{d-1}{2}}e^{-u\big(1+\frac{|x|^2}{z^2}\big)}\,du.$$

Posant $t=\big(1+\frac{|x|^2}{z^2}\big)u$ on obtient
$$|\widehat{a}(x)| \leq C_d z^{-d}\big(1+\frac{|x|^2}{z^2}\big)^{-\frac{d+1}{2}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{d-1}{2}}e^{-t}\,dt \leq C'_d z^{-d}\big(1+\frac{|x|^2}{z^2}\big)^{-\frac{d+1}{2}}.$$

□

*Démonstration du Lemme 10.33.* On a
$$\int_{\mathbf{R}} e^{-ity}e^{-|y|}dy = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-it)y}dy + \int_0^{+\infty} e^{-(1+it)y}dy$$
$$= \frac{1}{1-it}+\frac{1}{1+it} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Par transformé de Fourier inverse, on obtient
$$e^{-|y|} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{ity}\frac{2}{1+t^2}dt, \quad y\in\mathbf{R},$$

ce qui prouve $(i)$. Ensuite pour $t\in\mathbf{R}$ on a
$$\frac{1}{1+t^2} = \int_0^{\infty} e^{-u(1+t^2)}du,$$

on déduit de $(i)$ et du Théorème de Fubini que pour $\beta>0$
$$e^{-\beta} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u}\Big(\int_{\mathbf{R}} e^{i\beta t}e^{-ut^2}dt\Big)du.$$

En utilisant l'égalité (10.57) il vient

eg2 (10.58) $$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\beta^2}{4u}}du,.$$

ce qui prouve $(ii)$. □

## 10.8 Un résultat d'uniformité du temps de vie

gronw **Lemme 10.34.** *Soit $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$, strictement croissante et $A_0 > 0, a > 0$. Il existe alors $T_0 > 0$ tel que pour toute function continue $f : [0, T^*[\to \mathbf{R}^+$ satisfaisant*

hyp
$$f(t) \leq \mathcal{F}(A_0 + t^a \mathcal{F}(f(t))), \quad \forall t \in [0,, T^*[ \tag{10.59}$$

*on a*

concl
$$f(t) \leq \mathcal{F}(2A_0), \quad \forall t \in [0, \min(T_0, T^*)[. \tag{10.60}$$

*Démonstration.* Posons $A_1 = \mathcal{F}_1(2A_0)$. Soit $T_0 > 0$ tel que $A_0 + T_0^a \mathcal{F}(A_1) < 2A_0$. Par (10.59) on a $f(0) \leq \mathcal{F}(A_0) < A_1$. Supposons (10.60) fausse. Il existe alors $t_1 \in (0, \min(T_0, T^*)[$ tel que $f(t_1) > A_1$. Comme $f$ est continue on peut trouver $t_2 \in ]0, t_1[$ tel que$f(t_2) = A_1$. Alors par (10.59) on peut écrire

$$A_1 = f(t_2) \leq \mathcal{F}(A_0 + t_2^a \mathcal{F}(A_1)) < \mathcal{F}(A_0 + T_0^a \mathcal{F}(A_1)) < \mathcal{F}(2A_0) = A_1$$

ce qui est une contradiction. □

coro:gronw **Corollaire 10.35.** *Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace normé et pour $\varepsilon \in ]0, 1]$ soit $u_\varepsilon \in C^0([0, T_\varepsilon[, E)$ où $T_\varepsilon > 0$. On pose $f_\varepsilon(t) = \mathcal{N}(u_\varepsilon(t, \cdot))$ et on suppose qu'il existe $\mathcal{F} : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ strictement croissante, $A_0 > 0$ et $a > 0$ indépendants de $\varepsilon$ tels que*

hypo1
$$f_\varepsilon(t) \leq \mathcal{F}(A_0 + t^a \mathcal{F}(f_\varepsilon(t)) \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon[, \tag{10.61}$$

hypo2
$$\lim_{t \to T_\varepsilon} f_\varepsilon(t) = +\infty, \tag{10.62}$$

*Il existe alors $T_0 > 0$ (indépendant de $\varepsilon$) tel que toutes les $u_\varepsilon$ existent sur l'intervalle $[0, T_0]$.*

*Démonstration.* D'après le lemme précédent il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in ]0, 1]$ on a

borne
$$f_\varepsilon(t) \leq \mathcal{F}(2A_0), \quad \forall t \in [0, \min(T_0, T_\varepsilon)[. \tag{10.63}$$

Cela implique que l'on a $T_\varepsilon > T_0$ pour tout $\varepsilon \in ]0, 1]$. En effet si il existait un $\varepsilon_0 \in ]0, 1]$ tel que $T_{\varepsilon_0} \leq T_0$, on aurait $\min(T_0, T_{\varepsilon_0}) = T_{\varepsilon_0}$ et donc d'après (10.63)

$$f_{\varepsilon_0}(t) \leq \mathcal{F}(2A_0), \quad \forall t \in [0, T_{\varepsilon_0}[$$

ce qui contredirait (10.62). □

## 10.9 Retour sur le problème de Dirichlet

encore:diri

Au paragraphe 4.1 nous avons développé une théorie variationnelle pour le problème de Dirichlet dans l'ouvert non borné $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} : y < \eta(x)\}$ où $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^d)$. Dans ce paragraphe nous allons décrire quelques propriétés de la solution.

### 10.9.1 Une inégalité de Hardy

On notera $X = (x, y)$ un point de $\mathbf{R}^{d+1}$ et on suppose $d \geq 2$. Soit $X_0 \in \mathbf{R}^{d+1}$ tel que $d(X_0, \Omega) \geq c_0 > 0$.

ineg:hardy **Lemme 10.36.** *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^{1,0}(\Omega)$ on ait*

$$\Big\| \frac{u}{|X - X_0|} \Big\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla_X u\|_{L^2(\Omega)}$$

*Démonstration.* Posons pour simplifier $n = d + 1$ puis $\widetilde{u}(X) = u(X)$ si $X \in \Omega$ et $\widetilde{u}(X) = 0$ si $X \notin \Omega$. Alors $\nabla_X \widetilde{u} = \widetilde{\nabla_X u} \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Posons enfin $v(X) = \widetilde{u}(X + X_0)$. Comme $n \geq 3$ nous avons l'inégalité de Hardy

Hardy
$$\Big\| \frac{v}{|X|} \Big\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq \frac{2}{n-2} \|\nabla_X v\|_{L^2(\mathbf{R}^n)}. \tag{10.64}$$

En effet on a

$$\begin{aligned} \Big\| \frac{v}{|X|} \Big\|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} r^{n-3} |v(r\omega)|^2 \, dr \, d\omega = \frac{1}{n-2} \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} (\partial_r r^{n-2}) |v(r\omega)|^2 \, dr \, d\omega \\ &= \frac{2}{n-2} \mathrm{Re} \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} r^{n-2} \overline{v(r\omega)} \nabla_X v(r\omega) \cdot \omega \, dr \, d\omega. \end{aligned}$$

Il suffit alors d'écrire $r^{n-2} = r^{\frac{n}{2} - \frac{3}{2}} r^{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}$ et d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour conclure. Le lemme résulte alors aisément de (10.64). $\square$

### 10.9.2 La transformation de Kelvin

Notons $n = d + 1$ et soit $X_0 \in \mathbf{R}^n$ un point tel que $d(X_0, \Omega) \geq c_0 > 0$. Posons

$$\widetilde{\Omega} = \big\{ \widetilde{X} = \frac{X - X_0}{|X - X_0|^2} : X \in \Omega \big\}.$$

On a $|\widetilde{X}| = \frac{1}{|X - X_0|}$ de sorte que

$$\widetilde{X} = \frac{X - X_0}{|X - X_0|^2} \Longleftrightarrow X = X_0 + \frac{\widetilde{X}}{|\widetilde{X}|^2}.$$

On en déduit que $\widetilde{\Omega}$ est un ouvert borné contenu dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{c_0}$ et son bord, qui est l'image du bord de $\Omega$, contient le point $\widetilde{X} = 0$ dans son adhérence.

Kelvin **Lemme 10.37.** *Soit $w$ une solution dans $\Omega$ de l'équation $\Delta_X w = 0$. Posons*

$$\widetilde{w}(\widetilde{X}) = |\widetilde{X}|^{2-n} w(X_0 + \frac{\widetilde{X}}{|\widetilde{X}|^2}).$$

*Alors $\Delta_{\widetilde{X}} \widetilde{w} = 0$ dans $\widetilde{\Omega}$.*

*Démonstration.* Notons $y$ à la place de $\widetilde{X}$ et $x = X_0 + \frac{y}{|y|^2}$ à la place de $X$. On a

$$\begin{aligned}
\partial_j \widetilde{w}(y) &= (2-n)\frac{y_j}{|y|^n} w(x) + |y|^{2-n} \sum_{k=1}^{n} \Big( \frac{\delta_{jk}}{|y|^2} - 2\frac{y_j y_k}{|y|^4} \Big) \partial_k w(x), \\
&= (2-n) y_j |y|^{-n} w(x) + |y|^{-n} \partial_j w(x) - 2|y|^{-n-2} y_j \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_k w(x)
\end{aligned}$$

Alors $\partial_j^2 \widetilde{w}(y) = A_j + B_j + C_j + D_j$ où

$$\begin{aligned}
A_j &= (2-n)\big(|y|^{-n} - n y_j^2 |y|^{-n-2}\big) w(x), \quad B_j = (2-n) y_j |y|^{-n} \sum_{k=1}^{n} \Big( \frac{\delta_{jk}}{|y|^2} - 2\frac{y_j y_k}{|y|^4} \Big) \partial_k w(x), \\
C_j &= -n y_j |y|^{-n-2} \partial_j w(x) + |y|^{-n} \sum_{k=1}^{n} \partial_j \partial_k w(x) \Big( \frac{\delta_{jk}}{|y|^2} - 2\frac{y_j y_k}{|y|^4} \Big), \\
D_j &= 2(n+2) y_j^2 |y|^{-n-4} \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_k w(x) - 2 y_j |y|^{-n-2} \partial_j w(x) - 2|y|^{-n-2} \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_k w(x) \\
&\quad - 2 y_j |y|^{-n-2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} y_k \Big( \frac{\delta_{jl}}{|y|^2} - 2\frac{y_j y_l}{|y|^4} \Big) \partial_l \partial_k w(x).
\end{aligned}$$

Tout d'abord on voit facilement que $\sum_{j=1}^{n} A_j = 0$.

D'autre part on a $B_j = (2-n) y_j |y|^{-n-2} \partial_j w(x) - 2(2-n) y_j^2 |y|^{-n-4} \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_k w(x)$

et donc

$$\sum_{j=1}^{n} B_j = -(2-n)|y|^{-n-2} \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j w(x).$$

Ensuite on a $C_j = -n y_j |y|^{-n-2} \partial_j w(x) + |y|^{-n-2} \partial_j^2 w(x) - 2|y|^{-n-4} \sum_{k=1}^{n} y_j y_k \partial_j \partial_k w(x)$

d'où

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = -n|y|^{-n-2} \sum_{j=1}^{n} y_j \partial_j w(x) + |y|^{-n-2} \Delta w(x) - 2|y|^{-n-4} \sum_{j,k=1}^{n} y_j y_k \partial_j \partial_k w(x).$$

Enfin

$$\begin{aligned}
D_j = 2(n+2) y_j^2 |y|^{-n-4} \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_k w(x) - 2 y_j |y|^{-n-2} \partial_j w(x) - 2|y|^{-n-2} \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_k w(x) \\
- 2 y_j |y|^{-n-4} \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_j \partial_k w(x) + 4 y_j^2 |y|^{-n-6} \sum_{k,l=1}^{n} y_k y_l \partial_k \partial_l w(x)
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\sum_{j=1}^{n} D_j = 2|y|^{-n-2} \sum_{k=1}^{n} y_k \partial_k w(x) + 2|y|^{-n-4} \sum_{k,l=1}^{n} y_k y_l \partial_k \partial_l w(x).$$

On en déduit que

$$\Delta_y \widetilde{w}(y) = |y|^{-n-2}\Delta_x w(x) = 0.$$

$\square$

est:w **Proposition 10.38.** *Soit $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ et soit $w$ la solution variationnelle du problème*

$$\Delta_{x,y} w = 0 \ \textit{dans}\ \Omega, \quad w|_\Sigma = h.$$

*(i) Supposons $h \geq 0$. Alors $w \geq 0$ dans $\Omega$.*

*(ii) Il existe $C > 0$ telle que $|w(X)| \leq \frac{C}{|X|^d}$ et $|\nabla_X w(X)| \leq \frac{C}{|X|^{d+1}}$, $\quad |X| \to +\infty$.*

*Démonstration.* Rappelons que la solution variationnelle $w$ s'écrit $w = u + \underline{h}$ où $u \in H^{1,0}(\Omega)$ et $\underline{h}$ est un relèvement de $h$ dans $\Omega$. On peut prendre

relev (10.65) $$\underline{h}(x,y) = \chi(y - \eta(x))h(x), \quad (x,y) \in \Omega,$$

où $\chi(t) \in C^\infty(\mathbf{R}), \chi(t) = 1$ si $t \geq -\frac{1}{2}$, $\chi(t) = 0$ si $t \leq -1$.

Nous allons effectuer la transformation de Kelvin décrite précédemment et nous ramener au cas d'un ouvert borné. Soit $\widetilde{w}$ la transformée de $w$ écrite dans l'énoncé du Lemme 10.37.

Point 1. On a $\widetilde{w} \in H^1(\widetilde{\Omega})$.

On commence par estimer le Jacobien du changement de variable, $J := |\det\big(\frac{\partial \widetilde{X}}{\partial X}\big)|$. Comme $\widetilde{X} = \frac{X - X_0}{|X - X_0|^2}$ on a

$$\frac{\partial \widetilde{x}_k}{\partial x_j} = \frac{1}{|X - X_0|^2}\Big(\delta_{jk} - 2\frac{(x_j - x_{0j})(x_k - x_{0,k}}{|X - X_0|^2}\Big).$$

Nous allons montrer que

Jac (10.66) $$J = |X - X_0|^{-2(d+1)}.$$

En effet, posons $n = d + 1$ et $\omega_j = \frac{x_j - x_{0,j}}{|X - X_0|}$ Alors $\sum_{j=1}^n \omega_j^2 = 1$. Considérons la matrice $A = (\delta_{jk} - 2\omega_j\omega_k)$. Il est facile de voir que $A^2 = Id$ et donc que $|\det A| = 1$.

Comme $\widetilde{w}(\widetilde{X}) = |\widetilde{X}|^{2-n} w(X_0 + \frac{\widetilde{X}}{|\widetilde{X}|^2}) = |X - X_0|^{n-2} w(X)$ on a

normeL2 (10.67) $$\|\widetilde{w}\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega})} = \iint_\Omega |X - X_0|^{2(n-2)}|w(X)|^2|X - X_0|^{-2n}\, dX = \iint_\Omega \frac{|w(X)|^2}{|X - X_0|^4}\, dX.$$

Ensuite

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial \widetilde{x}_j}(\widetilde{X}) = (2 - n)\frac{\widetilde{x}_j}{|\widetilde{X}|^n} w(X) + \frac{1}{|\widetilde{X}|^n}\sum_{k=1}^n \big(\delta_{jk} - \frac{\widetilde{x}_j\widetilde{x}_k}{|\widetilde{X}|^2}\big)\frac{\partial w}{\partial x_k}(X)$$

d'où l'on tire que

$$|\nabla_{\widetilde{X}} \widetilde{w}(\widetilde{X})| \leq C\big(|X - X_0|^{n-1}|w(X)| + |X - X_0|^n|\nabla_X w(X)|\big).$$

Compte tenu de (10.66) on peut écrire

$$\|\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{w}\|^2_{L^2(\widetilde{\Omega})} \leq C\Big(\iint_\Omega \frac{|w(X)|^2}{|X-X_0|^2} + \iint_\Omega |\nabla_X w(X)|^2\,dX\Big).$$

Puisque $|X - X_0| \geq c_0 > 0$ dans $\Omega$ on déduit de (10.67) que

$$\|\widetilde{w}\|^2_{H^1(\widetilde{\Omega})} \leq C\Big(\iint_\Omega \frac{|w(X)|^2}{|X-X_0|^2} + \iint_\Omega |\nabla_X w(X)|^2\,dX\Big).$$

Comme $w = u + \underline{h}$ on déduit de (10.65) et du Lemme 10.36 que $\widetilde{w} \in H^1(\widetilde{\Omega})$.

Point 2. Il résulte du Lemme 10.37 que $\Delta_{\widetilde{X}}\widetilde{w} = 0$ dans $\widetilde{\Omega}$. D'autre part la donnée $h$ étant à support compact dans $\mathbf{R}^d$ son image par l'application de Kelvin est identiquement nulle dans un voisinage de $\widetilde{X} = 0$. Alors $\widetilde{w}|_{\partial\widetilde{\Omega}}$ est identiquement nulle au voisinage de $\widetilde{X} = 0$ et c'est donc une fonction régulière sur le bord de $\widetilde{\Omega}$ en y incluant le point $\widetilde{X} = 0$. D'après le Point 1. $\widetilde{w} \in H^1(\widetilde{\Omega})$ et on a unicité des solutions $H^1$ du problème de Dirichlet pour le Laplacien dans un ouvert borné régulier à donnée $C^1$. Un théorème classique de régularité montre que cette solution est en fait de classe $C^2$ sur l'adhérence de $\widetilde{\Omega}$ et donc, en particulier, bornée. On peut appliquer le principe du maximum pour en déduire le $(i)$ de la proposition. Ensuite on a par définition $w(\frac{\widetilde{X}}{|\widetilde{X}|^2}) = |\widetilde{X}|^{n-2}\widetilde{w}(\widetilde{X})$. Comme $\widetilde{w}(0) = 0$ et que $\widetilde{w} \in C^1$ au voisinage de $\widetilde{X} = 0$ on a $|\widetilde{w}(\widetilde{X})| \leq C|\widetilde{X}|$. Par conséquent $\Big|w(\frac{\widetilde{X}}{|\widetilde{X}|^2})\Big| \leq C|\widetilde{X}|^{n-1}$ pour $|\widetilde{X}| \leq \delta$ et donc

$$|w(X)| \leq C|X|^{1-n}, \quad |X| \geq \frac{1}{\delta},$$

ce qui prouve également le $(ii)$ puisque $n = d + 1$. Pour l'estimation de $\nabla_X w$ on renvoie au livre de Folland. □

## 10.10 Scaling pour le système des ondes de surfaces

.

echelle **Proposition 10.39.** *Soit $\eta, \psi, \Phi$ une solution du système*

eqww (10.68)
$$\begin{cases} \partial_t \eta = G(\eta)\psi \\ \partial_t \Phi + \dfrac{1}{2}|\nabla_{x,y}\Phi|^2 + g\eta = 0, \quad \Phi|_{y=\eta(t,x)} = \psi \end{cases}$$

*dans le domaine $\Omega = \{(t,x,y) : y < \eta(t,x)\}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $(\eta_\lambda, \Phi_\lambda, \psi_\lambda)$ donnée par*

(10.69)
$$\begin{cases} \eta_\lambda(t,x) = \lambda^{-1}\eta(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x) \\ \Phi_\lambda(t,x,y) = \lambda^{-\frac{3}{2}}\Phi(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x, \lambda y) \\ \psi_\lambda(t,x) = \lambda^{-\frac{3}{2}}\psi(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x) \end{cases}$$

*est une solution of (10.68) dans le domaine $\Omega_\lambda = \{(t,x,y) : y < \eta_\lambda(t,x)\}$.*

*Démonstration.* Un calcul simple montre que

$$\partial_t \Phi_\lambda + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\Phi_\lambda|^2 + g\eta_\lambda = \lambda^{-1}\big\{\partial_t \Phi + \frac{1}{2}|\nabla_{x,y}\Phi|^2 + g\eta\big\}(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x, \lambda y) = 0$$

dans le domaine $\{\lambda y < \eta(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x)\} = \{y < \eta_\lambda(t,x)\}$. En outre

$$\Phi_\lambda(t,x,\eta_\lambda(t,x)) = \lambda^{-\frac{3}{2}}\Phi(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x, \lambda\lambda^{-1}\eta(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x)) = \lambda^{-\frac{3}{2}}\psi(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x) = \psi_\lambda(t,x).$$

Ensuite

$$\Delta_{x,y}\Phi_\lambda(t,x,y) = \lambda^2\Delta_{x,y}\Phi(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x, \lambda y) = 0$$

dans l'ensemble $\{\lambda y < \eta(\lambda^{\frac{1}{2}}t, \lambda x)\} = \{y < \eta_\lambda(t,x)\}$ et on a $\Phi_\lambda|_{y=\eta_\lambda(t,x)} = \psi_\lambda(t,x)$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\big(G(\eta_\lambda)\psi_\lambda\big)(t,x) &= (\partial_y\Phi_\lambda - \nabla_x\eta_\lambda\cdot\nabla_x\Phi_\lambda)|_{y=\eta_\lambda(t,x)}\\ &= \lambda^{-\frac{1}{2}}(\partial_y\Phi(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x,\eta(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x)) - \nabla_x\eta(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x)\cdot\nabla_x\Phi_\lambda(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x,\eta(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x))\\ &= \lambda^{-\frac{1}{2}}\big(G(\eta)\psi\big)(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\partial_t\eta_\lambda - G(\eta_\lambda)\psi_\lambda)(t,x) = \lambda^{-\frac{1}{2}}\{\partial_t\eta - G(\eta)\psi\}(\lambda^{\frac{1}{2}}t,\lambda x) = 0.$$

□

**Remarque 10.40.** On a $\|\eta_\lambda(t,\cdot)\|^2_{\dot H^\sigma(\mathbf{R}^d)} = \lambda^{2\sigma-2-d}\|\eta(t,\cdot)\|^2_{\dot H^\sigma(\mathbf{R}^d)}$. Par conséquent l'espace de Sobolev invariant d'échelle pour $\eta$ est l'espace $H^{\sigma_c}(\mathbf{R}^d)$ avec $\sigma_c = 1 + \frac{d}{2}$. On a supposé que $\eta \in H^{s+\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^d)$ ce qui signifie que l'indice critique est $s_c = \frac{1}{2} + \frac{d}{2}$. Par conséquent nous sommes $\frac{1}{2}$ au dessus du scaling (ou $\frac{1}{2} - \frac{1}{12}$ au dessus si on utilise les inégalités de Strichartz).

## 10.11 Expression du coefficient de Taylor en fonction de $\eta, B, V$.

Dans le cas considéré dans ces notes (i.e. en fond infini) on a

**Lemme 10.41.**

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{1+|\nabla\eta|^2}\left(g + VG(\eta)V + BG(\eta)B - \frac{1}{2}G(\eta)V^2 - \frac{1}{2}G(\eta)B^2 - G(\eta)\eta\right).$$

*Démonstration.* Introduisons

$$Q = P - gy - \frac{1}{2}\left|\nabla_{x,y}\phi\right|^2.$$

Alors (voir la section 5) $Q$ est l'extension harmonique de sa trace $-g\eta - \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}B^2$.

On a alors

$$\begin{aligned}\partial_y Q - \nabla\eta\cdot\nabla Q &= \partial_y P - g - \nabla\phi\cdot\nabla\partial_y\phi - \partial_y\phi\partial_y^2\phi\\
&\quad -\sum_j \partial_j\eta\Big[\partial_j P - \nabla\phi\cdot\nabla\partial_j\phi - \partial_y\phi\partial_y\partial_j\phi\Big]\\
&= \partial_y P - \nabla\eta\cdot\nabla P - g\\
&\quad - \nabla\phi\cdot\Big[\nabla\partial_y\phi - \sum_j \partial_j\eta\nabla\partial_j\phi\Big]\\
&\quad - \partial_y\phi\Big[\partial_y^2\phi - \sum_j\partial_j\eta\partial_y\partial_j\phi\Big]\end{aligned}$$

Comme $\partial_k\phi$ est l'extension harmonique de $V_k$ et $\partial_y\phi$ est l'extension harmonique de $B$, on trouve

$$\Big[\nabla\partial_y\phi - \sum_j\partial_j\eta\nabla\partial_j\phi\Big]\Big|_{y=\eta} = G(\eta)V,$$

et

$$\Big[\partial_y^2\phi - \sum_j\partial_j\eta\partial_y\partial_j\phi\Big]\Big|_{y=\eta} = G(\eta)B.$$

Comme $P|_{y=\eta} = 0$ on a

$$(\partial_j P)|_{y=\eta} = \partial_j(P|_{y=\eta}) - (\partial_y P)|_{y=\eta}\partial_j\eta = -a|_{y=\eta}\partial_j\eta.$$

Donc

$$\big[\partial_y Q - \nabla\eta\cdot\nabla Q\big]\big|_{y=\eta} = (1+|\nabla\eta|^2)a - g - V\cdot G(\eta)V - BG(\eta)B.$$

Par ailleurs

$$\big[\partial_y Q - \nabla\eta\cdot\nabla Q\big]\big|_{y=\eta} = G(\eta)(Q|_{y=\eta}) = G(\eta)\big\{-g\eta - \frac{1}{2}V^2 - \frac{1}{2}B^2\big\}.$$

Ces relations impliquent la formule annoncée. $\square$

## 10.12 Une relation utile.

On garde les notations de la section 1. Soit $v$ une solution du système d'Euler (1.14).

**Lemme 10.42.**

$$\frac{d}{dt}\iint_{\Omega(t)} f(t,x)\,dx = \iint_{\Omega(t)}(\partial_t + v\cdot\nabla_x)f(t,x)\,dx.$$

*Démonstration.* Soit $X(t,y)$ la position de la particule au temps $t$ issue du point $y$. Alors (cf. (1.1)) on a

$$\dot X(t) = v(t,X(t)),\quad X(0) = y,\quad \Omega(t) = \{X(t,y) : y\in\Omega(0)\}.$$

On a vu d'autre part (cf. Corollaire 1.2) que l'application $y\to X(t,y)$ est un difféomorphisme de $\Omega(0)$ sur $\Omega(t)$. Posant $x = X(t,y)$ on déduit que

$$\iint_{\Omega(t)} f(t,x)\,dx = \iint_{\Omega(0)} f(t,X(t,y))\left|\det\Big(\frac{\partial X}{\partial y}(t,y)\Big)\right|\,dy$$

Il résulte de (1.6) que $\Delta(t) := \det\Big(\frac{\partial X}{\partial y}(t,y)\Big) = \exp\Big(\int_0^t \operatorname{div} v(s, X(s,y))\, ds\Big) = 1$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iint_{\Omega(t)} f(t,x)\,dx &= \iint_{\Omega(0)} \big(\partial_t f + \dot{X}(t,y)\cdot\nabla_x f\big)(t, X(t,y))\,dy,\\ &= \iint_{\Omega(0)} \big(\partial_t f + v\cdot\nabla_x f\big)(t, X(t,y))\,dy = \iint_{\Omega(t)} \big(\partial_t f + v\cdot\nabla_x f\big)(t,x)\,dx.\end{aligned}$$

□