Ako sčítať nekonečne dlhééé súčty...

Klepancová Michaela, Varga Marek, Záhumenská Lucia

Sčitovanie patrí medzi základné aritmetické operácie. Táto známa a pomerne jednoduchá záležitosť v prípade sčitovania dvoch, troch, štyroch atď. čísel sa stane nečakaným problémom v prípade sčitovania *nekonečného* počtu čísel (sčítancov). Prvý krát sa s touto otázkou stretli už v starovekom Grécku.

Spomeňme dva príbehy, známe pod názvom Zenónove apórie. Najskôr si predstavme lukostrelca vzdialeného o istú dĺžku d od terča, na ktorý mieri. Vystrelený šíp zrejme musí pred zásahom prejsť celú vzdialenosť d. To však znamená, že najskôr musí prejsť polovičnú dráhu, tj. dĺžku $\frac{d}{2}$. Potom musí zo zostávajúcej vzdialenosti prejsť opäť polovicu, teda $\frac{d}{4}$. Z chýbajúcej časti musí opäť najskôr prekonať polovicu, to znamená dĺžku $\frac{d}{8}$, atď... Vyzerá to teda tak, že vystrelený šíp musí stále prekonávať istú zostávajúcu vzdialenosť k svojmu cieľu, inak povedané – nikdy k terču nedorazí.

Podobnú pointu nájdeme v príbehu o Achilovi a korytnačke. Achiles, jeden z najväčších bojovníkov v gréckej mytológii sa má zúčastniť pretekov s korytnačkou. Jeho hrdosť mu káže dať jej určitý náskok, označme túto vzdialenosť trebárs α. Po zaznení štartovného výstrelu Achiles samozrejme beží rýchlejšie, a bez problémov prekoná vzdialenosť α. Avšak korytnačka ho nečakala, a medzitým sa presunula ďalej o dĺžku β. Kým Achiles prebehne tento úsek, nech by bol ľubovoľne malý, korytnačka sa zatiaľ dostane o ešte menší kúsošek γ pred Achila. Ten musí prekonať ďalší úsek, ale korytnačka už bude zase pred ním, atď...Vidíme, že aj náš takto starostlivo vybraný pretekár akokoľvek pomalú korytnačku nikdy nedobehne.

Toľko slovný rozbor týchto situácií. Skutočnosť a skúsenosť nás však učí, že len ťažko nájdete človeka, ktorý sa pred vás postaví s výzvou, aby ste doňho strieľali – veď guľka k nemu nikdy nedorazí. A možno ešte menej ľudí by sa naháňalo s korytnačkou, sú presvedčení, že s ľahkosťou by ju dobehli. Prečo sme teda dostali zjavný rozpor pri našom popise uvedených situácií?

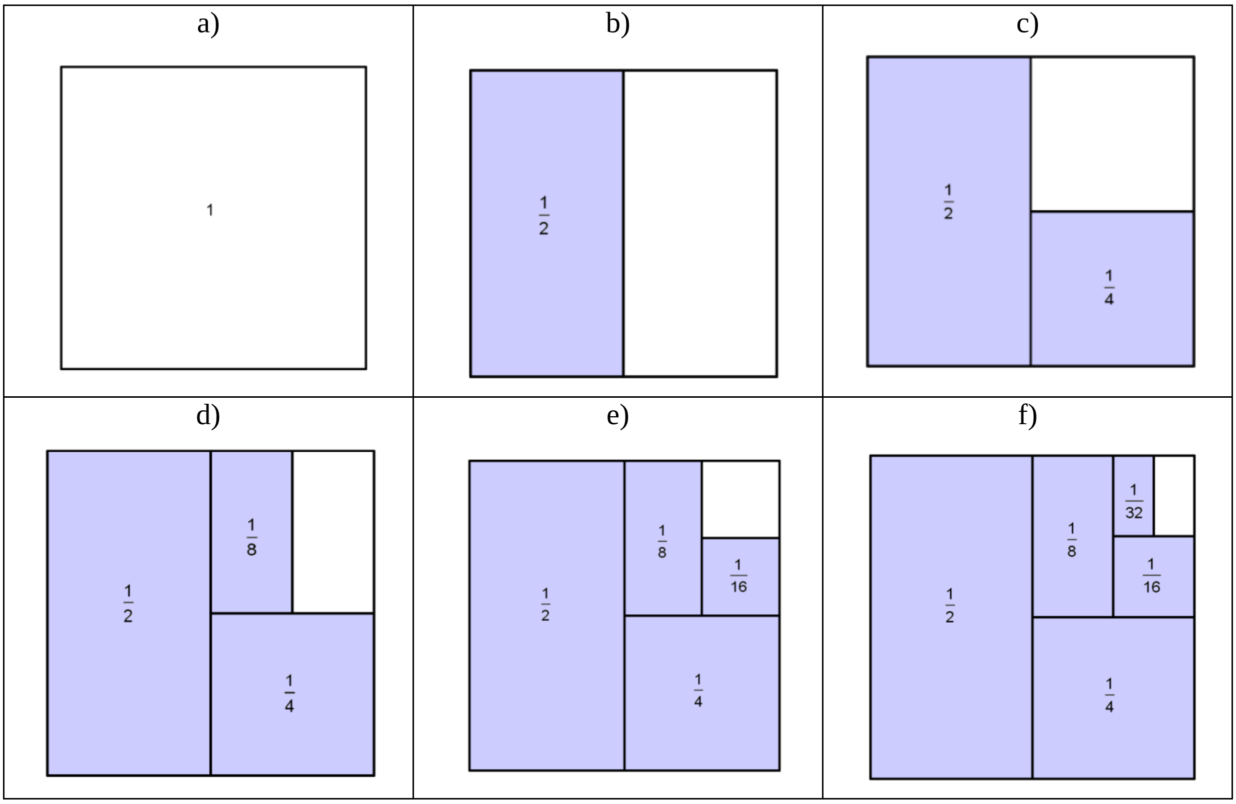
Počiatok našich problémov (či skôr problémov starogréckych matematikov a filozofov) zrejme tkvie v tom, že let šípu – dynamický dej, rozložili na niekoľko statických situácií. Avšak koľko takýchto statických situácií musíme zobrať, aby sme „poskladali" celý dynamický proces? Pretransformovaním tejto otázky do matematiky zisťujeme, že musíme sčítať *nekonečne veľa* čísel.

No a ľudská predstavivosť v spomínaných dobách (a určite aj dnes) odmieta prijať fakt, že sčítaním nekonečne veľa čísel (presnejšie nekonečného počtu kladných čísel) môžeme dostať konečný výsledok, konečné reálne číslo. Keďže raz vidieť je lepšie ako stokrát počuť, pokúsime sa tento fakt priblížiť pomocou jednoduchých obrázkov.

Zostrojme štvorec s dĺžkou strany $a = 1$. Rozdeľme ho na dva rovnaké obdĺžniky, ich obsahy zrejme budú $\frac{1}{2}$. Vyberme si jeden z nich, a opäť ho rozdeľme na dve rovnaká časti – tento raz to budú štvorce s obsahmi $\frac{1}{4}$. Zvoľme si jeden z nich a rozdeľme ho na dva rovnaké obdĺžniky, ich obsahy budú $\frac{1}{8}$. Nekonečným pokračovaním v tomto procese by sme zrejme vyplnili celý základný štvorec,

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

ktorého obsah je $S=1$ (pozri obrázok 1 a, b, c, d, e, f). Prirodzeným záverom je teda tvrdenie, že $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1.$*



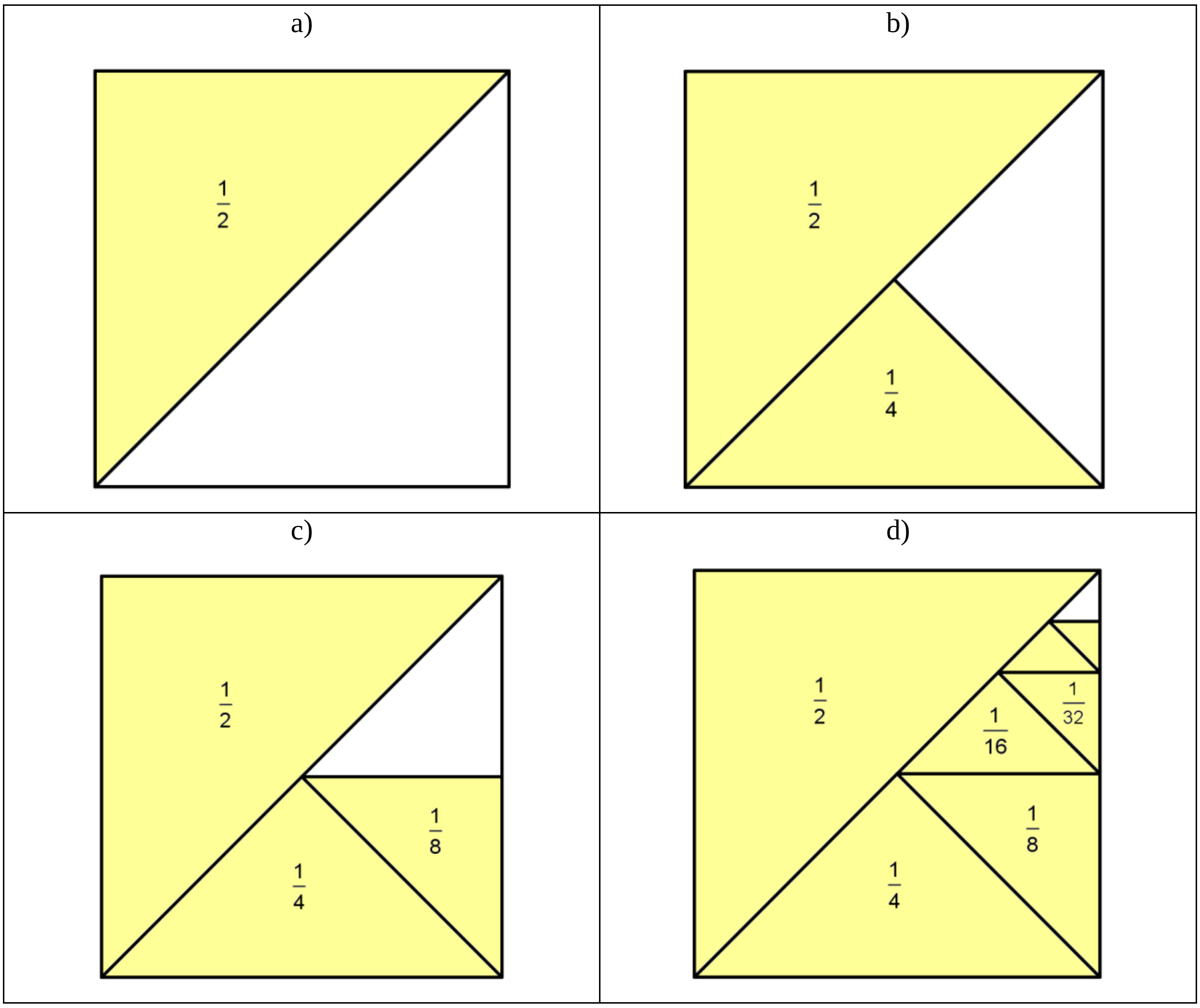
Obr. 1 Číselný rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

Na záver si povedzme, že ako obyčajne máme v matematike aj v prípade zápisu nekonečného číselného radu pohodlnú symboliku, totiž $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Vyskúšajme si, že tento výsledok dostaneme nezávisle od toho, akým spôsobom spomínaný štvorec „rozkrájame“. Zoberme si teda opäť štvorec so stranou $a=1$. Rozdeľme ho uhlopriečkou na dve časti – tými budú dva pravouhlé trojuholníky s obsahmi $\frac{1}{2}$. Vyberme si jeden z nich a výškou na preponu ho rozdeľme na ďalšie dva zhodné pravouhlé trojuholníky, ich obsahy zrejme budú $\frac{1}{4}$. Zoberme jeden z nich a výškou na preponu ho rozdelíme na dva pravouhlé trojuholníky, tento raz s obsahmi $\frac{1}{8}$. Ak by sme v tomto procese pokračovali do nekonečna (pozri obrázok 2 a, b, c, d), zjednotením všetkých takto získaných trojuholníkov dostaneme pôvodný štvorec, preto sčítaním obsahov všetkých týchto pravouhlých trojuholníkov dostaneme obsah daného štvorca. Opäť teda môžeme písať $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$.

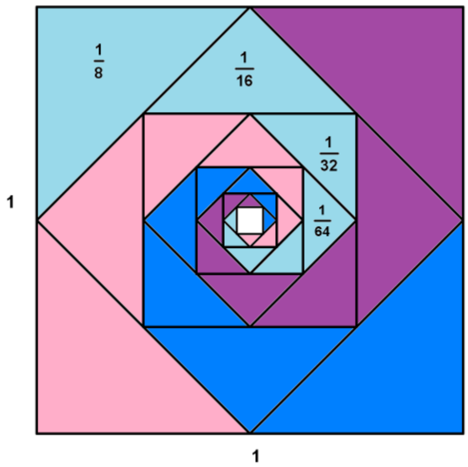
---

* Ak sa teda touto optikou pozrieme na prípad letiaceho šípa, ľahko ukážeme, že skutočne dorazí do terča vzdialeného od strelca d. Totiž pre súčet úsekov, ktoré prekoná šíp počas letu platí $\frac{d}{2}+\frac{d}{4}+\ldots+\frac{d}{2^n}+\ldots=$ $=d\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=d$.



Obr. 2 Číselný rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

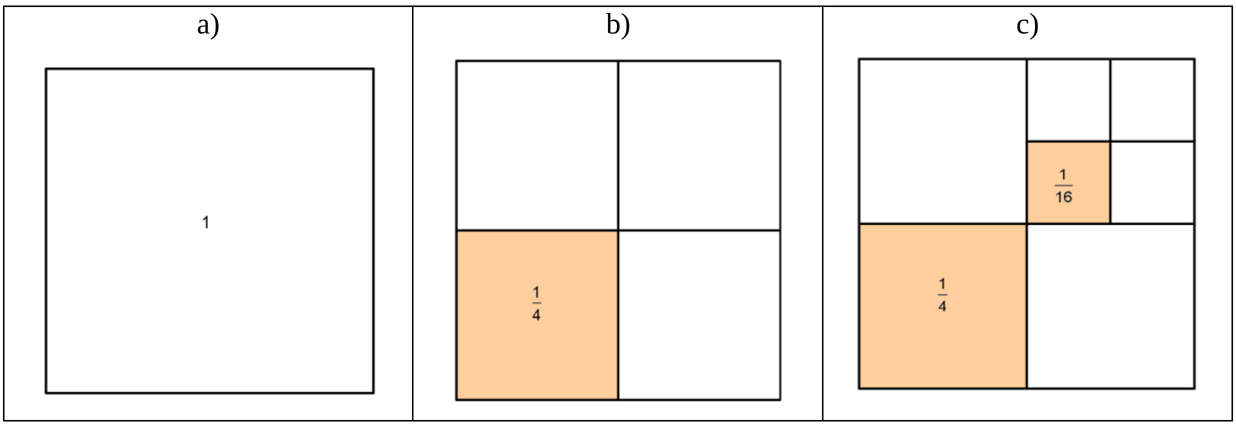
S nevеľkými zmenami by sme mohli naše úvahy preniesť aj do priestoru, stačí uvažovať kocku s hranou $a=1$. Ľahko premyslíme, aké dve delenia kocky by zodpovedali dvom vyššie uvedeným deleniam štvorca, pričom objemy získaných telies by sa rovnali objemu celej kocky. Znova by sme sa presvedčili, že $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$. Pridajme – už bez tradičného detailného rozboru – ešte jeden pohľad na rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$. Znova si pomôžme štvorcom, tadične so stranou $a=1$. Nájdime stredy jeho strán, a ich spojením získame ďalší štvorec, pričom budeme v tomto procese stále pokračovať. Potom je z obrázka 3 zrejmé, že platí $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\ldots+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots=\frac{1}{4}$. Doplnením prvých dvoch členov radu ľahko dostávame $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\ldots+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1.$

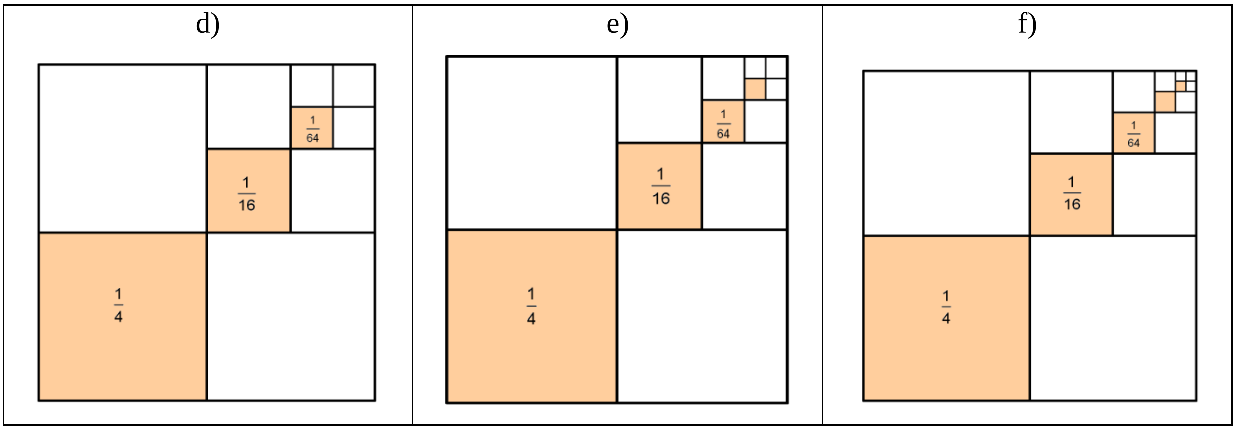


Obr. 3 Číselný rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$

Doterajšie úvahy nám začínajú naznačovať, že súčtom nekonečného počtu kladných sčítancov skutočne môže byť konečné reálne číslo. Ukážme ďalej, že rad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ nemá žiadne „výsadné“ postavenie – že k rovnakému záveru možno prísť pri veľkom množstve ďalších nekonečných číselných radov. Samozrejme, kvôli názornosti si opäť môžeme pomôcť jednoduchými obrázkami.

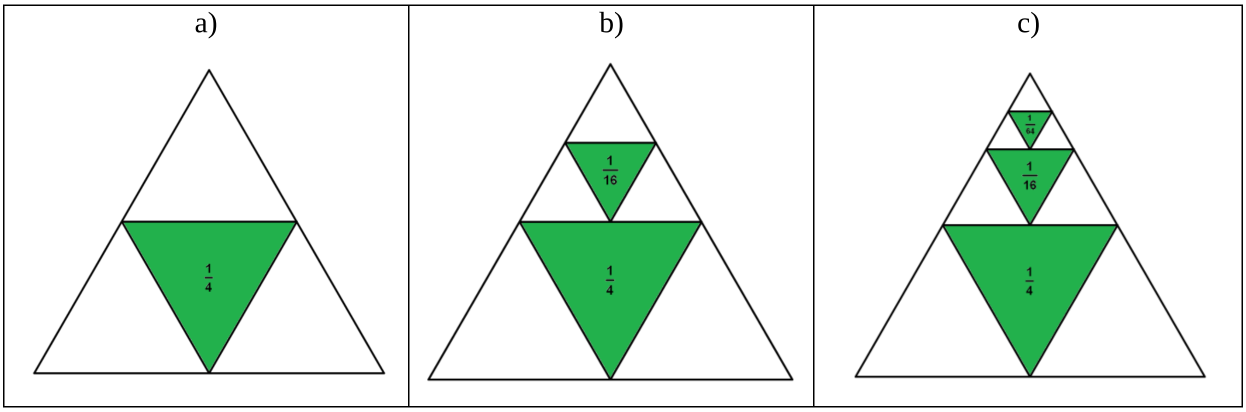
Veľmi dobre nám v predchádzajúcich príkladoch poslúžil štvorec – zostrojme si teda ešte raz štvorec so stranou dĺžky $a=1$. Dvomi strednými priečkami ho rozdeľme na štyri menšie štvorce, ktorých obsahy majú hodnotu $\frac{1}{4}$. Vyberme si jeden z nich a rovnakým spôsobom ho zasa rozdeľme na štyri zhodné menšie štvorce, ktorých obsahy sú $\frac{1}{16}$. Ako už očakávame, jeden z nich zoberme a rozdeľme ho daným postupom na štyri rovnaké štvorce, pre ktorých obsahy dostávame hodnotu $\frac{1}{64}$. Toto delenie útvaru opakujme nekonečne veľa krát (pozri obrázok 4 a, b, c, d, e, f), a všimnime si len štvorce farebne vyznačené na našom obrázku. Súčet všetkých ich obsahov, tj. súčet $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots$, zrejme tvorí jednu tretinu z obsahu pôvodného štvorca. Dostávame teda $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots=\frac{1}{3}$, či inak zapísané $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{3}$.





Obr. 4 Číselný rad $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots$

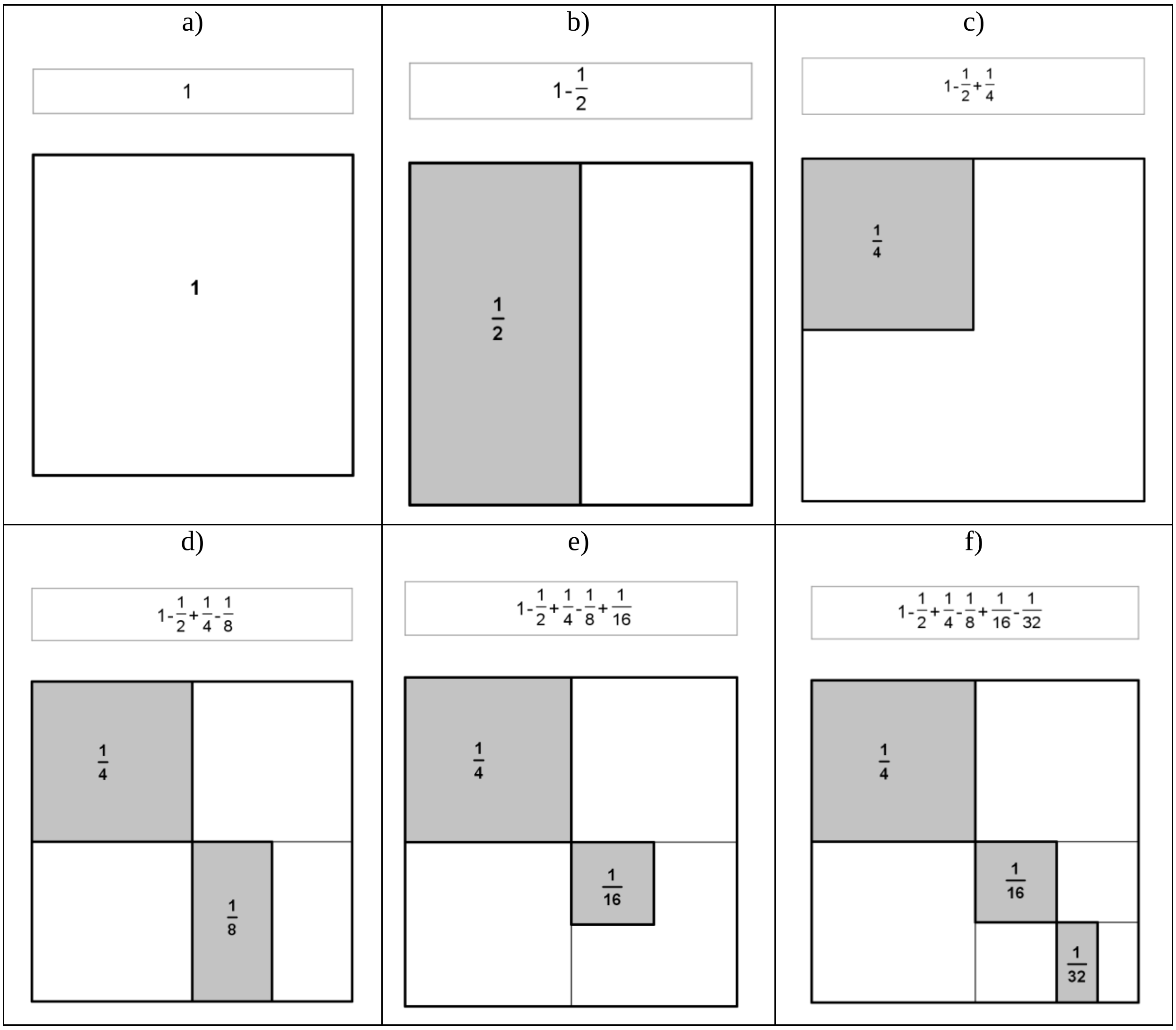
Opäť neverme hneď všetkému, čo vidíme – skúsme získaný výsledok overiť inou cestou. Prestaňme sa odvolávať len na štvorec a pomôžme si rovnostranným trojuholníkom (na dĺžke jeho strany nezáleží), označme jeho obsah S. Spojením jeho stredov strán dostaneme štyri zhodné rovnostranné trojuholníky, ktorých obsahy zjavne majú hodnotu $\frac{S}{4}$. Vyberme si jeden z nich a pomocou stredných priečok vytvoríme z neho štyri zhodné rovnostranné trojuholníky, pričom ich obsahy sú $\frac{S}{16}$. Po treťom analogickom kroku dostávame ďalšiu štoricu rovnostranných trojuholníkov, tento raz s obsahmi $\frac{S}{64}$. V tomto procese môžeme donekonečna pokračovať (pozri obrázok 5 a, b, c), pritom získame množinu trojuholníkov farebne zvýraznených na našom obrázku. Vzhľadom na to, akú časť pôvodného rovnostranného trojuholníka vytvárajú, môžeme tvrdiť, že platí $\frac{S}{4}+\frac{S}{16}+\frac{S}{64}+\ldots+\frac{S}{4^n}+\ldots=\frac{S}{3}$, resp. po vykrátení oboch strán tejto rovnosti nenulovým číslom S dostávame $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots=\frac{1}{3}$.

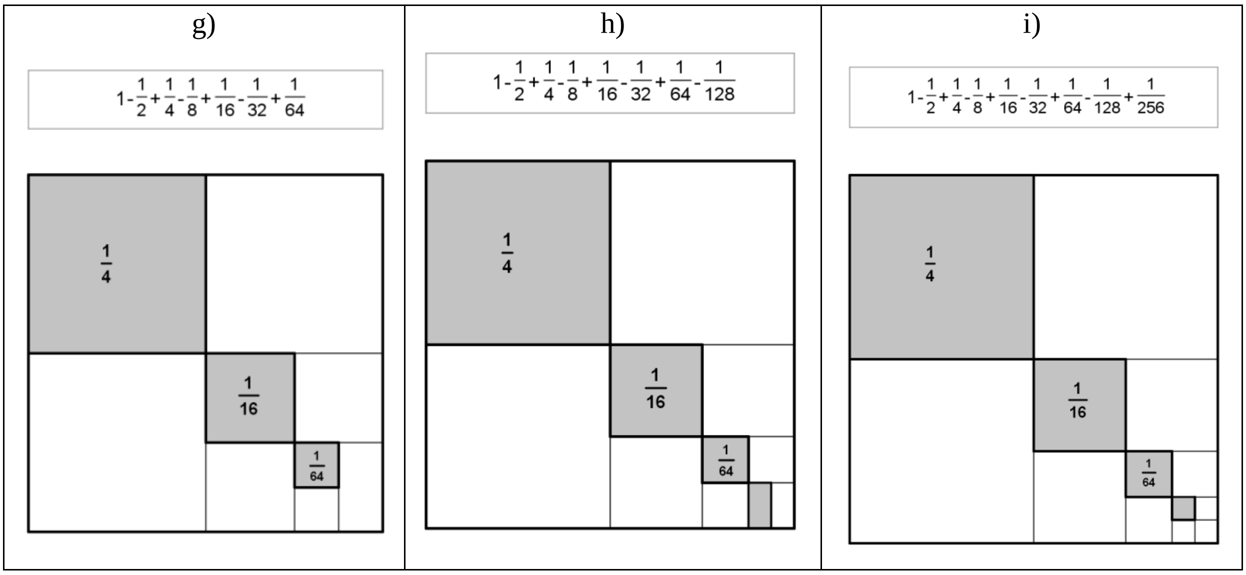


Obr. 5 Číselný rad $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots$

Doteraz sme kládli dôraz – na zvýraznenie paradoxu súčet nekonečného počtu sčítancov je konečné číslo – len na súčet kladných čísel. Zamyslime sa v ďalšom aj nad všeobecnejším problémom: môžeme byť súčtom nekonečného počtu kladných a záporných sčítancov nejaké konečné číslo? Pozrime sa aj na túto otázku geometrickým pohľadom.

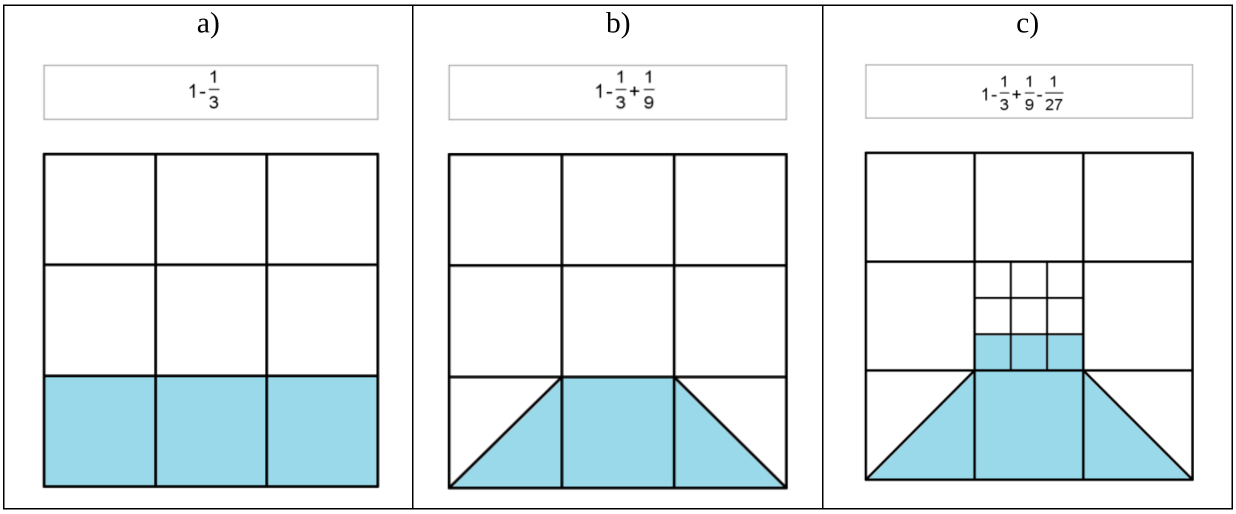
Na úvod zvolíme rad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$, pri jeho skúmaní totiž môžeme využiť jeden z našich predošlých obrázkov. Znovu zostrojíme štvorec so stranou $a=1$, a budeme ho deliť spôsobom opísaným na obrázku 4. Napriek tomu náš pohľad bude odlišný – zatiaľ čo v uvedenej situácii sme si všímali vyfarbené útvary, teraz nás bude zaujímať práve doplnok tejto časti. Samotný popis tentoraz uvedieme priamo v obrázku 6 a, b, c, d, e, f, g, h, i. Pred pozorným preštudovaním zopakujme, že je nutné venovať sa tento raz nevyfarbeným útvarom. Tie napokon vytvoria z obsahu pôvodného štvorca dvojtretinovú časť, teda môžeme písať $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}$.

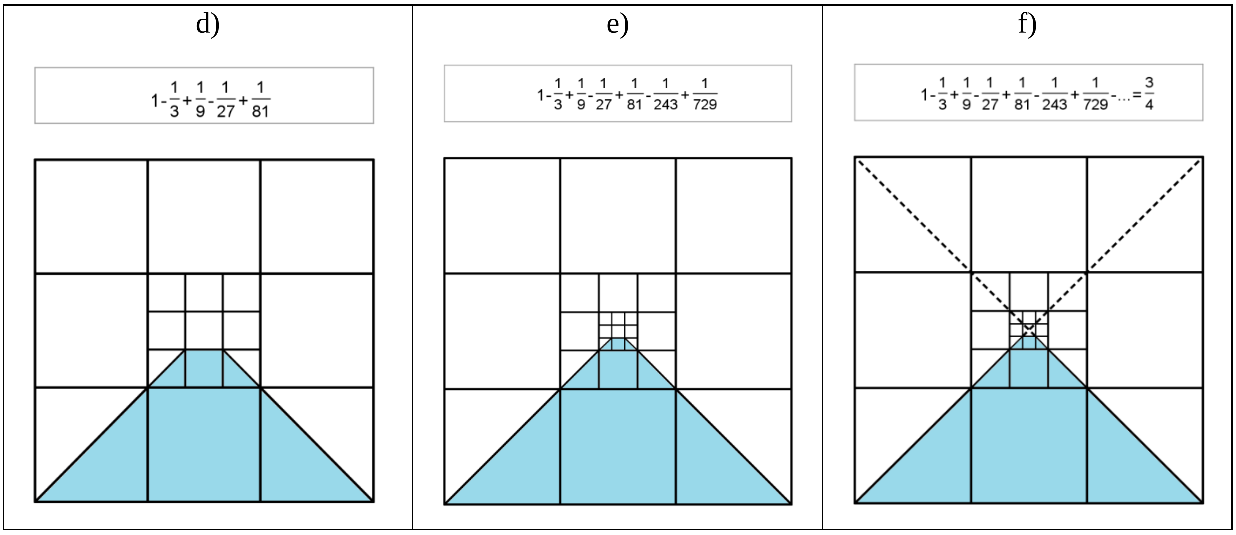




Obr. 6 Číselný rad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$

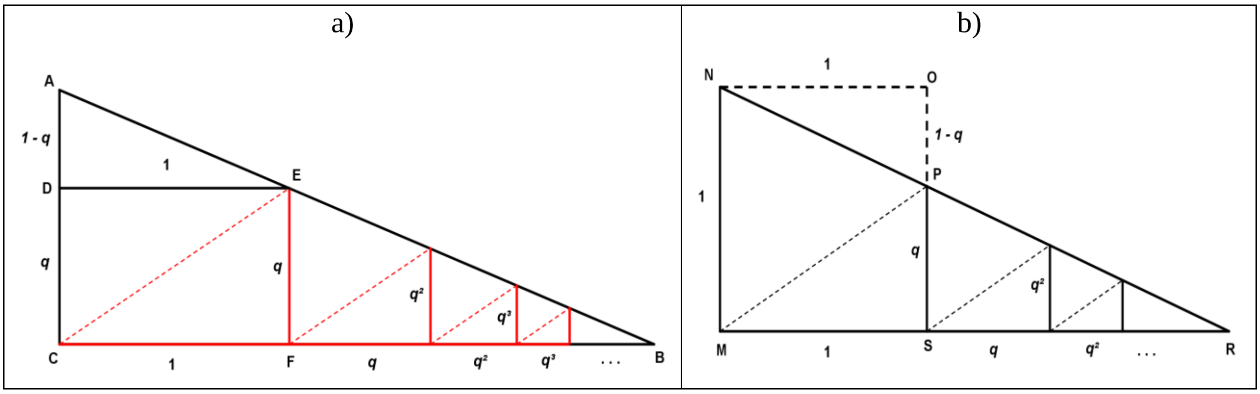
Pridajme ešte aspoň jednu podobnú ukážku, venujme sa nekonečnému číselnému radu $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\ldots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$. Hoci je to na neuverenie, opäť nám poslúži štvorec s dĺžkou strany $a=1$. Princíp, akým ho treba deliť pochopíme z nasledujúcej série obrázkov 7 a, b, c, d, e, f. Doplňme len, že pozornosť opäť treba upriamiť na nevyfarbené útvary, ktoré získavame našim procesom. Nie je ťažké si všimnúť, že nekonečným opakovaním nášho postupu získame útvar, ktorého obsah bude rovný trom štvrtinám obsahu celého štvorca. To znamená, že dostávame $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\ldots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{3}{4}$.





Obr. 7 Číselný rad $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{12}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots$

Nekonečné číselné rady, ktorým sme sa doteraz venovali, možno všeobecne zapísať v tvare $q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots$ resp. $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, a nazývame ich geometrické rady, číslo q zase kvocient radu. Treba ešte spomenúť, že nie náhodou sme volili len hodnoty $q\in(-1;1)$**, ide totiž o prípady, keď súčet geometrického radu je konečný. Ak označíme symbolom s súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, tak sme sa stretli už s nasledovnými prípadmi: $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow s=1$, $q=\dfrac{1}{4} \Rightarrow s=\dfrac{1}{3}$, $q=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow s=\dfrac{2}{3}$, $q=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow s=\dfrac{3}{4}$. Žiaľ, je možné, že súčet geometrického radu nezávisí len od jeho kvocientu. Preto namiesto hypotéz o tvare vzorca pre súčet s, skúsme aj túto hľadanú formulu odhaliť pomocou geometrických náčrtov a úvah.



Obr. 8 Číselný rad $1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots$

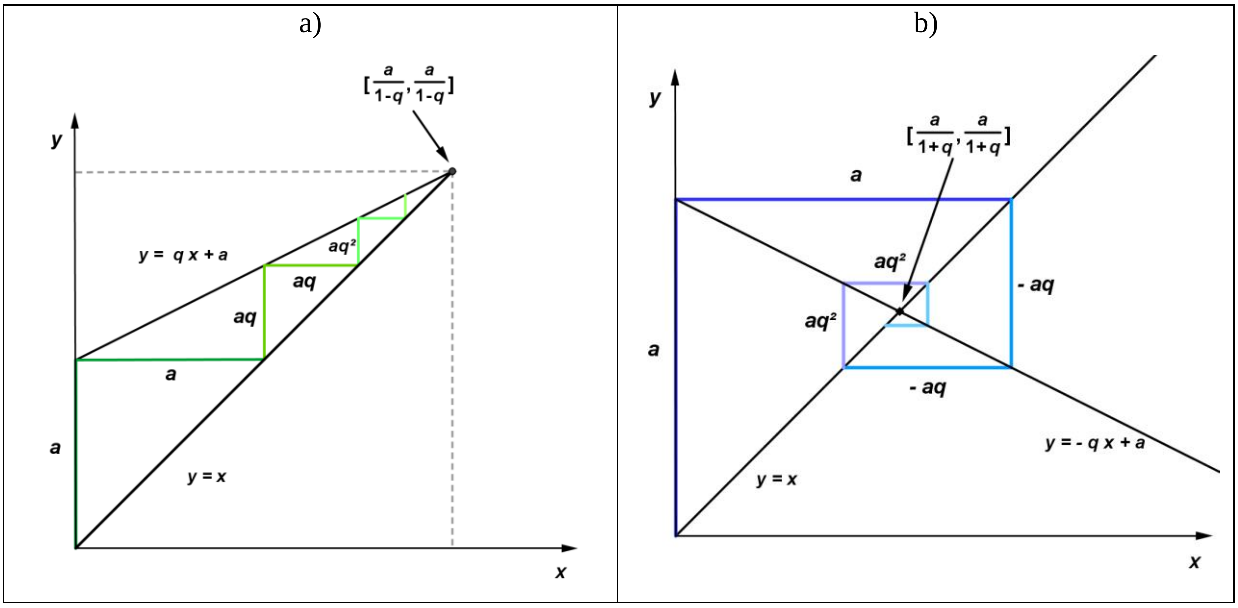
Zostrojme si najskôr obdĺžnik CFED, pričom $|CF|=1$, $|CD|=q$. Z obrázka 8a je jasná aj konštrukcia bodu A, podobne bod B je prienikom polpriamok AE a CF. Z podobnosti trojuholníka CFE a všetkých ďalších farebne vyznačených trojuholníkov vyplýva, že dané

** Taktiež sa nezaoberáme triviálnym prípadom $q=0$.

horizontálne úseky majú skutočne dĺžky q, q^2, q^3 atď. Z podobnosti trojuholníkov DEA a CBA už dostávame $1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\dfrac{1}{1-q}$.

Poznamenajme, že k tomuto výsledku by sme sa dopracovali aj „doplnením“ štvorca MSON na obrázku 8b a využitím podobnosti trojuholníkov NPO a MRN.

Dopracovali sme sa teda k jednoduchému vzorcu udávajúcemu súčet radu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Kajúcne priznávame, že situáciu nám uľahčil prvý člen, ktorým bolo číslo 1. Ako to bude vyzerať vo všeobecnejšej verzii, tj. v prípade radu $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$?



Obr. 9 Číselný rad $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$, resp. $a-aq+aq^2-\ldots+a(-q)^{n-1}+\ldots$

Sledujme obrázok 9a. V súradnicovej sústave si zostrojíme priamky $y=x$ a $y=qx+c$. Druhá z nich pretína os o_y vo vzdialenosti a od počiatku. Úsečka vedená z tohto prieniku rovnobežne s osou o_x po prienik s priamkou $y=x$ má takisto dĺžku a, veď ide o os kvadrantu. Ďalšia vertikálna úsečka má dĺžku aq, ide totiž o funkžnú hodnotu funkcie $y=qx+a$ v bode a. Aj ďalší postup v zostrojovaní farebných úsekov je už zrejmý. Avšak obe súradnice bodu prieniku uvedených priamok zodpovedajú vlastne súčtu jednotlivývh úsekov, teda platí $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots=\dfrac{a}{1-q}$.

Na obrázku 9b sme pomocou priamok $y=x$ a $y=-qx+a$ podobným spôsobom predviedli načítanie členov radu $a-aq+aq^2-\ldots+a(-q)^{n-1}+\ldots$.

Zdá sa teda, že súče nekonečného geometrického radu závisí jednak od prvého člena radu, jednak od jeho kvocientu. Na záver sa ešte pokúsme overiť získaný vzorec aj jednoduchým výpočtom. Predpokladajme, že geometrický rad $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ má súčet s, tj. $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = s$. Teda platí $s=a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ Vynásobme túto rovnosť nenulovým číslom q, získavame $sq=aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n+1}+\ldots$ Odčítaním týchto rovností máme $s-sq=a$, odkiaľ $s=\dfrac{a}{1-q}$, čo je vzorec odvodený aj z našich obrázkov.

Literatúra

[1] Georgiev, V., Mushkarov, O., Ulovec, A., Dimitrova, N., Mogensen, A., Sendova, E. *MEETING in Mathematics*, Demetra Publishing House, Sofia, 2008

[2] http://www.dm.unipi.it/~olymp/comenius/ (March 10, 2009)