Setning Poncelets og lotubundnir þríhyrningar í sporbaugi

Vladimir Georgiev, Veneta Nedyalkova
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

1 Sögulegur inngangur

Ein af mikilvægustu og fallegustu setningunum í varpfræði er setning Poncelets, sem fjallar um lokaða marghyrninga sem eru innritaðir í eitt keilusnið og umritaðir um annað keilusnið (að neðan gefum við nákvæmu yrðinguna og sönnum við hana í tilfelli þríhyrninga). Setningin hefur djúp tengsl við önnur svið stærðfræðinnar. Markmið þessa kaflahluta er að skýra nánar út tengslin milli setningu Poncelets og biljarðs í sporbaugi. Við fyrstu sýn virðast þessi viðfangsefni vera ótengd þar sem þau koma úr tveimur óháðum stærðfræðisviðum: rúmfræði og hreyfikerfi. En falinn þráður tengir þessi viðfangsefni saman: tilvist undirliggjandi fyrirbæris (sem við nefnum Poncelet samsvörunina) sem reynist vera sporbaugsferill. Það er vel þekkt að hægt er að skilgreina grúpumynstur á sporbaugsferlum og hagnýting þess varpar miklu ljósi á fyrrnefnd viðfangsefni.

Til að lesa flestar bækur tengdar þessu viðfangefni þarf undirstöðu í tvinnfallagreiningu, línulegri algebru og grannfræði og því er ekki einfalt að búa til verkefni sem henta nemendum á framhaldsskólastigi.

Við reynum því að finna nálgun sem krefst einungis þeirra verkfæra sem finnast í venjulegri framhaldsskólanámsskrá. Þetta er ekki auðleyst vandamál. Hin klassíska A. Cayley nálgun (sjá [2], [3]) notar sporbaugsheildi, aðrar heimildir (sjá [5], [6], [8] og heimildirnar sem er þar vísað í) beita rökum úr varprúmfræði og grúpufræði.

Fyrir framsetningu á verkefni Poncelets þarf einungis að þekkja skilgreiningu og jöfnu sporbaugs.

Setning 1. *(Setning Poncelets) Gerum ráð fyrir að gefnir séu tveir sporbaugar þannig að annar sé inni í hinum. Ef til er n-hyrningur sem er innritaður í öðrum sporbaugnum og umritaður um hinn sporbauginn þá er sérhver punktur á jaðri ytri sporbaugsins hornpunktur í umrituðum n-hyrningi innra sporbaugsins.*

Til eru nokkrar sannanir á þessari merkilegu setningu, flestar þeirra eru ekki einfaldar. Rekja má setningu Poncelets til nítjándu aldar og veittu margir stærðfræðingar þess tíma henni athygli (ítarleg sögulýsing er gefin í [1]). Aðalástæðan fyrir þessu er sú staðreynd að margar sannanir setningarinnar krefjast notkunar tvinntölu- og einsleitra hnita, hugtaka sem voru að koma fram á þeim tíma (1813) þegar Poncelet uppgötvaði setninguna. Það gerði hann meðan hann var í haldi sem stríðsfangi í Rússnesku borginni Saratov. Eftir að hann snéri aftur heim til Frakklands birti hann sönnunina í bók sinni [7], sem gefin var út árið 1822. Sönnunin, sem var fremur margbrotin, einfaldar setninguna í tvo (ekki endilega sammiðja) hringi. Umræða um hugmyndirnar í sönnun Poncelets er gefin í [1], bls. 298 - 311.

Tilgangur okkar er að finna einfalda sönnun á tilfelli sem er ekki augljóst: tilfellið $n = 3$ og þar sem við höfum tvo sporbauga

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

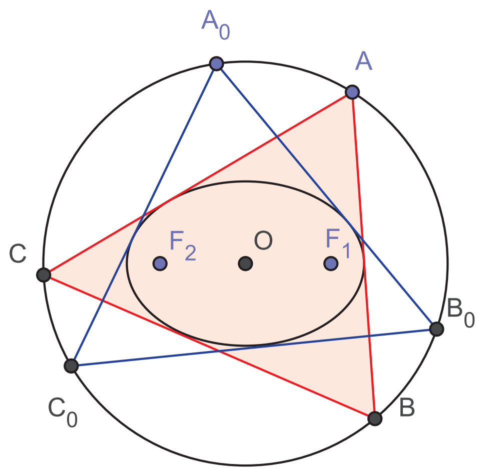
og

$$e_1: \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{2}$$

þannig að e_1 sé innan e.

Við munum sanna þetta tilfelli setningar Poncelets og auk þess eftirfarandi sértækari niðurstöðu.

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Mynd 1: Setning Poncelet í tilfelli hrings og sporbaugs

Setning 2. *(sjá mynd 1) G.r.f. að sporbaugurinn* (2) *sé innan sporbaugsins* (1)*, þ.e.*

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,$$

$$a > a_1, b > b_1.$$

Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:
i) til er þríhyrningur $\triangle A_0B_0C_0$ *innritaður í* e *og umritaður um* e_1*,*
ii) tölurnar a, b, a_1 *og* b_1 *uppfylla*

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1.$$

iii) fyrir hvaða punkt A *sem er á sporbaugnum* e *getum við fundið einkvæmt ákvarðaðan þríhyrning* $\triangle ABC$ *innritaðan í* e *og umritaðan um* e_1*.*

2 Einskorðun við hring og sporbaug

Skoðum tvo sporbauga

$$e: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

og

$$e_1: \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \tag{4}$$

þ.a. e_1 er innan e. Þessu skilyrði má lýsa sem

$$a > b > 0, a_1 > b_1 > 0,$$

$$a > a_1, b > b_1.$$

Með einföldum hnitaskiptum í planinu,

$$X = \frac{x}{a}, \quad Y = \frac{y}{b}, \tag{5}$$

hefur sporbaugurinn e í nýju hnitunum jöfnuna

$$X^2 + Y^2 = 1 \tag{6}$$

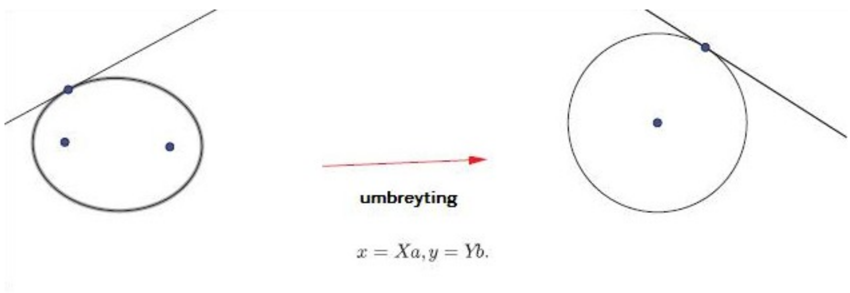
þ.a. hann er hringurinn $k(O,1)$ með miðju í upphafspunkti nýja hnitakerfisins O og radíus 1.

Hinn sporbaugurinn e_1 verður

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1, \quad A_1 = \frac{a_1}{a}, \quad B_1 = \frac{b_1}{b} \tag{7}$$

og ljóst er að þessi breyting á hnitum varðveitir skurðpunkta, línu er breytt í línu, hring í hring, sporbaugi í sporbaug (eða hring sem sértilfelli) og ef lína er snertill sporbaugsins þá helst hún sem snertill sporbaugsins eftir hnitaskiptin (sjá mynd 2).

Dæmi 1. *Sannaðu þá staðreynd að ef lína og sporbaugur eru snertlar þá haldast þau sem snertlar eftir hnitaskiptin* (5).



Mynd 2: Sporbaugi er breytt í hring

Héðan í frá vinnum við með hring $k(O,1)$ með miðju í upphafspunktinum O og radíus 1.

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{8}$$

og sporbaug e_1

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad 1 > a_1 \geq b_1 \tag{9}$$

inni í $k(O,1)$ eins og sést á mynd 1

Við útbúum lista af spurningum til að undirbúa lausnina á verkefninu (eða sönnunina á setningu Poncelets):

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0(x_0, y_0)$ á $k(O,1)$ finnið snertilínurnar frá A_0 til e_1 og finnið einnig skurðpunkta þessara snertilína við hringinn $x^2+y^2 = 1$. Köllum skurðpunktana A_1, A_2 (okkur vantar formúlu sem lýsir hnitum A_1, A_2 m.t.t. x_0, y_0 og halla línanna A_0A_1 og A_0A_2, k_1, k_2);
- Finnið vensl milli φ_j og $\theta_{1,2} = \arctan k_{1,2}$ með því að nota stikunina

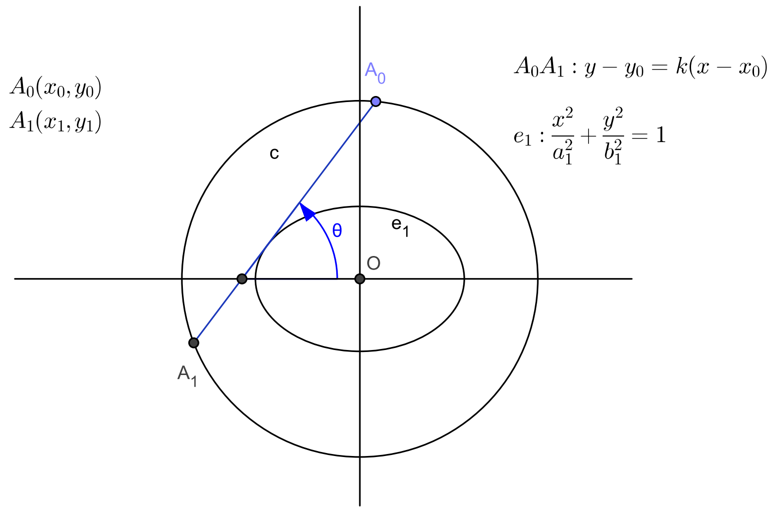
$$x_j = \cos\varphi_j, y_j = \sin\varphi_j, \;\; j = 0,1,2 \tag{10}$$

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, punktur $A_0(x_0, y_0)$ á $k(O,1)$, snertilínur frá A_0 til e_1 sem skera $k(O,1)$ í punktunum A_1, A_2 notið stikunina (10) til að gefa, nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þess að línan A_0A_1 sé snertill sporbaugsins e_1, táknað við φ_0, φ_1 og $\theta_1 = \arctan k_1$.

- Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, punktur $A_0(x_0, y_0)$ á $k(O,1)$, snertilínur frá A_0 til e_1, sem skera $k(O,1)$ í punktunum A_1, A_2, notið stikunina (10) til að gefa, nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þess að línan A_0A_1 sé snertill sporbaugsins e_1, táknað við φ_0, φ_2 og $\theta_2 = \arctan k_2$.

- Með því að nota einfaldar hornafallaumbreytingar sýndu að eftirfarandi tvö skilyrði
  a) línan A_0A_1 er snertill sporbaugsins e_1 (skilyrðinu er lýst m.t.t. φ_0, φ_1 og $\theta_1 = \arctan k_1$)
  b) línan A_0A_2 er snertill sporbaugsins e_1 (skilyrðinu er lýst m.t.t. φ_0, φ_2 og $\theta_2 = \arctan k_2$)
  leiði til þess að
  $\star$ línan A_1A_2 er snertill sporbaugsins e_1 (skilyrðinu er lýst m.t.t. φ_1, φ_2 og $\theta_{1,2} = \arctan k_{1,2}$)

Við gefum svör, skref fyrir skref, á nokkrum hjálparsetningum sem auðveldlega má sannreyna.



Mynd 3: Hvenær er A_0A_1 snertill e_1?

Hjálparsetning 1. *Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$, má lýsa nauðsynlegum og nægjanlegum skilyrðum þess að línan $y - y_0 = k(x - x_0)$ gegnum punktinn $A_0(x_0, y_0)$ sé snertill e_1 með*

$$(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2 a_1^2.$$

Hjálparsetning 2. *Gefinn er sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0(x_0, y_0)$ á einingarhringnum. Lína gegnum punktinn er táknuð með*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

og annar skurðpunktur þessarar línu við einingarhringinn, $k(O,1) : x^2 + y^2 = 1$, er táknaður með $A_1(x_1, y_1)$. Þá er:

$$x_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} x_0 - \frac{2k}{k^2 + 1} y_0,$$

$$y_1 = -\frac{2k}{k^2 + 1} x_0 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} y_0.$$

Sönnun. Skurðpunktarnir eru gefnir með jöfnunum

$$x^2 + (y_0 + k(x - x_0))^2 = 1.$$

Þessi jafna hefur tvær rætur x_0 og x_1 þ.a.

$$x_0 + x_1 = -\frac{2k(y_0 - kx_0)}{1 + k^2}.$$

Út frá þessum venslum fáum við lýsingu á x_1. Á sama hátt fáum við lýsingu á y_1. □

Hjálparsetning 3. *Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ á einingarhringnum, þá táknum við með*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

hvaða línu sem er í gegnum A_0. Látum $A_1(x_1, y_1)$ vera skurðpunkt þessarar línu við einingarhringin $k(O, 1) : x^2 + y^2 = 1$, þannig að $A_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Þá taka venslin úr hjálparsetningu 2 formið

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

þar sem

$$\theta = \arctan k.$$

Sönnun. Við höfum venslin

$$\frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} = -\cos(2\theta), \quad \frac{2k}{k^2 + 1} = \sin(2\theta).$$

Með því að nota innsetninguna

$$x_1 = \cos\varphi, \ y_1 = \sin\varphi$$

fáum við

$$\cos\varphi = -\cos(2\theta)\cos\varphi_0 - \sin(2\theta)\sin\varphi_0 =$$
$$= \cos(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 + \sin(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \cos(2\theta + \pi - \varphi_0),$$
$$\sin\varphi = -\sin(2\theta)\cos\varphi_0 + \cos(2\theta)\sin\varphi_0 =$$
$$= \sin(2\theta + \pi)\cos\varphi_0 - \cos(2\theta + \pi)\sin\varphi_0 = \sin(2\theta + \pi - \varphi_0),$$

og þessi vensl gefa

$$2\theta + \pi - \varphi_0 = \varphi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Þar með er sönnuninni lokið. □

Hjálparsetning 4. *Gefinn sporbaugur $e_1 : x^2/a_1^2 + y^2/b_1^2 = 1$ og punktur $A_0 = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, þá táknum við með*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

hvaða línu sem er í gegnum A_0 og með A_1 skurðpunkt línunnar við hringinn $e : x^2 + y^2 = 1$, þ.a. $A_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Þá er t snertill e_1 ef og aðeins ef

$$\cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) = b_1^2 \sin^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + a_1^2 \cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2.$$

Sönnun. Út frá hjálparsetningu 1 sést að við þurfum að umskrifa $(y_0 - kx_0)^2$ yfir í fall af φ og φ_0. Við höfum

$$y_0 - kx_0 = \frac{\cos\theta \sin\varphi_0 - \sin\theta\cos\varphi_0}{\cos\theta} = \frac{\sin(\varphi_0 - \theta)}{\cos\theta}. \tag{11}$$

Með því að nota venslin

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z},$$

úr hjálparsetningu 3 sjáum við að teljarinn í (11) er

$$\sin(\varphi_0 - \theta) = \sin\left(\frac{\varphi_0 - \varphi + \pi}{2} - m\pi\right) = (-1)^m \cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}\right)$$

meðan nefnarinn verður

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m \sin\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)$$

svo við fáum

$$\sin^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)(y_0 - kx_0)^2 = \cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right).$$

Með því að beita hjálparsetningu 1 á venslin hér að ofan þá ljúkum við sönnun hjálparsetningarinnar.

□

Athugasemd 1. *Við getum endurskrifað venslin í hjálparsetningu 4 á mismunandi vegu með því að nota formúluna*

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2},$$

Þannig fæst

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = c^2\cos(\varphi + \varphi_0) + D, \tag{12}$$

eða

$$(1 - c^2)\cos\varphi\cos\varphi_0 + (1 + c^2)\sin\varphi\sin\varphi_0 = D, \tag{13}$$

þar sem

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1. \tag{14}$$

3 Sönnun á setningu Poncelets með hornaföllum

Við tökum punkt $A_0 = (cos\varphi_0\,, \sin\varphi_0)$ á einingarhringnum og finnum tvær snertilínur t_1, t_2 gegnum A_0 að sporbaugnum

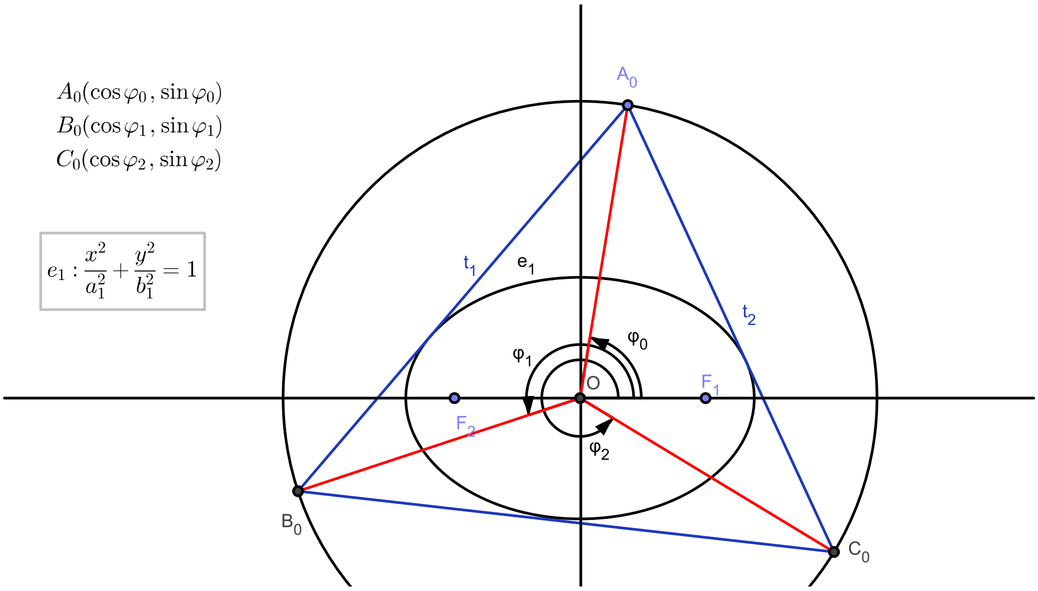
$$e_1 = \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Síðan finnum við skurðpunkta t_1, t_2 við einingahringinn (sjá mynd 4) og táknum skurðpunktana tvo (frábrugðna A_0) með

$$B_0(cos\varphi_1\,, \sin\varphi_1), C_0(cos\varphi_2\,, \sin\varphi_2).$$

Byrjum á að setja fram forsendu Poncelets þannig að til sé a.m.k. einn þríhyrningur, $\triangle\, A_0B_0C_0$, innritaður í einingarhringinn, þ.e.

$$A_0 = (cos\varphi_0\,, \sin\varphi_0), B_0 = (cos\varphi_1\,, \sin\varphi_1), C_0 = (cos\varphi_2\,, \sin\varphi_2), \quad 0 \le \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \le 2\pi$$



Mynd 4: Merking forsendunnar að $\triangle\, A_0B_0C_0$ sé umritaður á e_1?

og umritaður um innri sporbauginn e_1 Þar sem A_0B_0 er snertill við e_1 vitum við að:

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right) + b_1^2 \tag{15}$$

(skv. hjálparsetningu 4). Á sama hátt gefur sú staðreynd að A_0C_0 og B_0C_0 eru snertlar e_1 og hjálparsetning 4 að

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_2-\varphi_0}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2+\varphi_0}{2}\right) + b_1^2. \tag{16}$$

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{17}$$

Við getum sameinað öll þessi vensl í ein

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_j-\varphi_\ell}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_j+\varphi_\ell}{2}\right) + b_1^2, \quad 0 \le j \ne \ell \le 2. \tag{18}$$

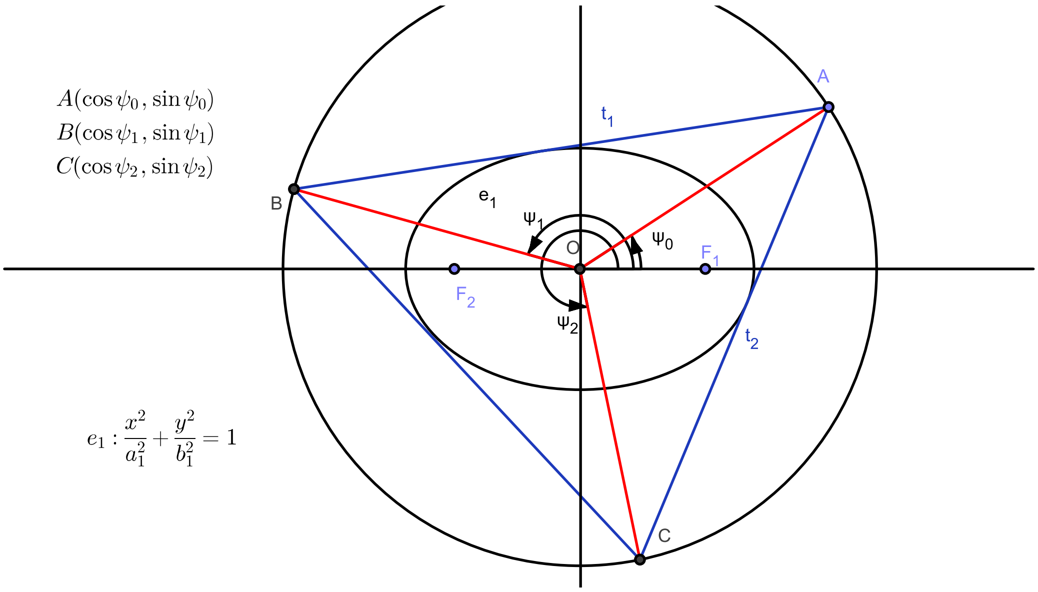
Hvað vitum við út frá forsendu setningar Poncelets og hvað þurfum við að sanna?

Við tökum hvaða punkt $A = (cos\psi_0\,, \sin\psi_0)$ sem er á einingarhringnum og finnum snertilínurnar t_1, t_2 gegnum A_0 að sporbaugnum

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Síðan finnum við skurðpunkta t_1, t_2 við einingahringinn (sjá mynd 5) og táknum skurðpunktana tvo (sem eru frábrugðnir A) með

$$B = (cos\psi_1\,, \sin\psi_1), C = (cos\psi_2\,, \sin\psi_2).$$



Mynd 5: Tvær hliðar eru snertlar $\Rightarrow$ þriðja hliðin einnig snertill

Þar sem AB er snertill e_1 vitum við að:

$$\cos^2\left(\frac{\psi_1 - \psi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_1 + \psi_0}{2}\right) + b_1^2 \tag{19}$$

(vegna hjálparsetningar 4). Eins, sú staðreynd að A_0C_0 og B_0C_0 eru snertlar e_1 og hjálparsetning 4 leiða til

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_0}{2}\right) + (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_0}{2}\right) = b_1^2. \tag{20}$$

Við drögum þá saman allar forsendur setningu Poncelets og getum sagt að (18), (19) and (20) séu sannaðar.

Hvað þurfum við þá að sanna?

Með hjálparsetningu 4 í huga sjáum við að markmið okkar er að sýna

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{21}$$

Rita má þessi vensl sem

$$(1 - c^2)\cos\psi_2\cos\psi_1 = (1 + c^2)\sin\psi_2\sin\psi_1 + D, \tag{22}$$

þar sem

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2, D = a_1^2 + b_1^2 - 1. \tag{23}$$

samkvæmt athugasemd 1

Nú erum við loks komin í þá stöðu að við getum beitt hjálparsetningunni um hornaföll úr viðaukanum og ályktum að

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1 - c^2)^2(1 + c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1 + c^2)^2}. \tag{24}$$

Með því að bera þessi vensl saman við (21) sjáum við að þörf er á eftirfarandi skilyrðum

$$4D^2 = (1-c^2)^2(1+c^2)^2, \; D^2 = b_1^2(1+c^2)^2 \tag{25}$$

Þessi vensl og (23) leiða til eftirfarandi nægjanlegs skilyrðis

$$a_1 + b_1 = 1 \tag{26}$$

sem leiðir til þess að $\triangle\, ABC$ er umritaður um e_1. Skilyrðið (23) er einnig nauðsynlegt til að uppfylla eiginleikann

- til er þríhyrningur $\triangle\, A_0B_0C_0$ umritaður um e_1.

Ef til er a.m.k. einn $\triangle\, A_0B_0C_0$ umritaður um e_1, þá gildir (26) og þar af leiðandi er $\triangle\, ABC$ umritaður um e_1.

Þar með er sönnun setningarinnar lokið.

4 Viðauki: Hjálparsetning um hornaföll

Hjálparsetning 5. *G.r.f. að*

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) \neq 0, \; \cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) \neq 0, \; \cos\psi_0 \neq 0$$

og

$$\begin{cases} (1-c^2)\cos\psi_1\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\psi_1\sin\psi_0 = D & ; \\ (1-c^2)\cos\psi_2\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\psi_2\sin\psi_0 = D & . \end{cases} \tag{27}$$

Þá er

$$(1-c^2)\tan\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) = (1+c^2)\tan\psi_0 \tag{28}$$

og ennfremur

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2}. \tag{29}$$

Sönnun. Tökum mismun venslanna í jöfnu (27). Fáum

$$-(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0 + (1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0 = 0.$$

Forsendan

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right) \neq 0$$

leiðir til þess að

$$(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos\psi_0 = (1+c^2)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\sin\psi_0.$$

Þetta sannar (28). Leiða má út hin venslin með því að framkvæma eftirfarandi áætlun

- fyrsta jafnan í (27) $\times \sin\psi_2$ $-$ önnur jafnan í (27) $\times \sin\psi_1$;

- fyrsta jafnan í (27) $\times \cos\psi_2$ − önnur jafnan í (27) $\times \cos\psi_1$.

Á þennan hátt fáum við

$$2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = 2(1-c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,$$

$$-2D\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = -2(1+c^2)\sin\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0,$$

svo með því að nota forsenduna

$$\sin\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\neq 0$$

fáum við

$$\frac{D}{1-c^2}\cos\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\cos\psi_0,$$

$$\frac{D}{1+c^2}\sin\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\sin\psi_0.$$

Með því að taka summu þessara samsemda í öðru veldi fáum við

$$\frac{D^2}{(1-c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)+\frac{D^2}{(1+c^2)^2}\sin^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)$$

og þessi jafna gefur (29)

Þar með lýkur sönnun hjálparsetningarinnar.

□

Heimildir

[1] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort, and D. W. Raven, *Poncelet's closure theorem,* Expo. Math. **5** (1987), 289 – 364.

[2] A. Cayley, *Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **6** (1853), 99-102.

[3] A. Cayley, *Developments on the porism of the in-and-circumscribed polygon,* Philosophical magazine **7** (1854), 339-345.

[4] H. Dörrie, *100 great problems in Mathematics. Their history and solutions*, Dover Publ., New York, (1965).

[5] V. Dragovic, M. Radnovic *Poncelet Porisms and Beyond*, Birkhäuser, Springer-Basel, (2011).

[6] L.Flatto, *Poncelet's Theorem*, AMS, (2008).

[7] J. V. Poncelet, *Traite sur les Proprietes des Figures,* Paris, (1822).

[8] S.Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, Students Mathematica Library, (2005)