

Úr kyrrstæðu í virka verkefnagerð

Vladimir Georgiev, Yuki Kurokawa
Íslensk þýðing, Ragnar Stefánsson

1 Stuttur inngangur

Meðan starfsemi verkefnagerðarstofunnar (e. problem posing lab) í Pisa stóð yfir kviknaði áhugi á að læra eitthvað um þau verkfæri og aðferðir sem notuð eru í öðrum löndum til þess að kynna stærðfræðilegar röksemdafærslur á aðlaðandi hátt. Þessi möguleiki var til staðar þar sem prófessor Kurokawa var gestur stærðfræðideildarinnar í Pisa á tímabilinu apríl - september 2011.

Aðalmarkmið þessa kafla er eftirfarandi:

- Að reyna að finna út hvernig hægt er að tvinna saman verkefnagerðina í Pisa og japanska reynslu af stærðfræðikennslu.

Í einni af verkefnagerðarstofunni vorið 2011 í Pisa voru alþjóðlegir þátttakendur: nemendur (tilvonandi kennarar) frá Spáni og Ítalíu. Störf stofunnar voru skipulögð af höfundum þessa kafla, þ.e. við höfðum alþjóðlega þátttöku á öllum stigum.

2 Dæmi fyrir mismunandi getustig

Við byrjum á mjög einföldum dæmum af frægum japönskum verkefnum með reikningum án þess að nota neinar jöfnur. Það er mikilvægt að leggja áherslu á að uppruni þessara verkefna og dæma er ekki tilbúningur heldur eru þau byggð á raunverulegum vandamálum.

(Trönu og skjaldböku útreikningar) Þetta dæmi er byggt á aðstæðum úr raunveruleikanum (sjá mynd 1) og fyrir það þurfum við líkan með þægileg upphafsgildi.



Mynd 1: Trönu og skjaldböku útreikningar

Líkanið er byggt á eftirfarandi athugunum (sjá Mynd 2):

Ef við höfum 70 höfuð (trönur og skjaldbökur) þá er fjöldi fóta háður fjölda trana. Möguleikarnir eru:

- Við höfum 70 trönur og 0 skjaldbökur;
- Við höfum 69 trönur og 1 skjaldböku;
- Við höfum 68 trönur og 2 skjaldbökur;

• ...

Þessir möguleikar eru gefnir í töflu 1.

Höfuð (70)				
Trönur	70	69	68	...
Skjaldbökur	0	1	2	...

(1)

Gerum nú ráð fyrir að heildarfjöldi fóta sé 222. Í töflu 2 eru mismunandi möguleikar skoðaðir.

Fætur (222)				
Trönur	140	138	136	...
Skjaldbökur	0	4	4	...
ALLS	140	142	144	...

(2)

Ljóst er að síðasta röðin í þessari töflu byrjar á 140 og næstu liðirnir fást með því að bæta 2 við í hvert skipti, þ.e.

$$140(+2) \Rightarrow 142(+2) \Rightarrow 144(+2) \Rightarrow \dots$$

Spurningin er nú:

- Hversu mörg skref þurfum við að taka til þess að byrja í 140 og enda í 222?

Til dæmis ef við þurfum að byrja í 140 enda í 142 þurfum við að taka

$$\frac{142 - 140}{2} = 1$$

skref, til að byrja í 140 og enda í 144 þurfum við

$$\frac{144 - 140}{2} = 2$$

skref og til að byrja í 140 og enda í 222 þurfum við

$$\frac{222 - 140}{2} = 41$$

skref. Þar sem hvert skref minnkar fjölda trana um 1 höfum við

$$70 - 41 = 29$$

trönur og 41 skjaldböku.



Mynd 2: Líkan fyrir Trönu og Skjaldböku útreikninga

Umræður um þetta verkefni í verkefnagerðarstofunni snérust um þá staðreynd að horfa má á verkefnið sem jöfnu.

$$4x + 2y = 222,$$

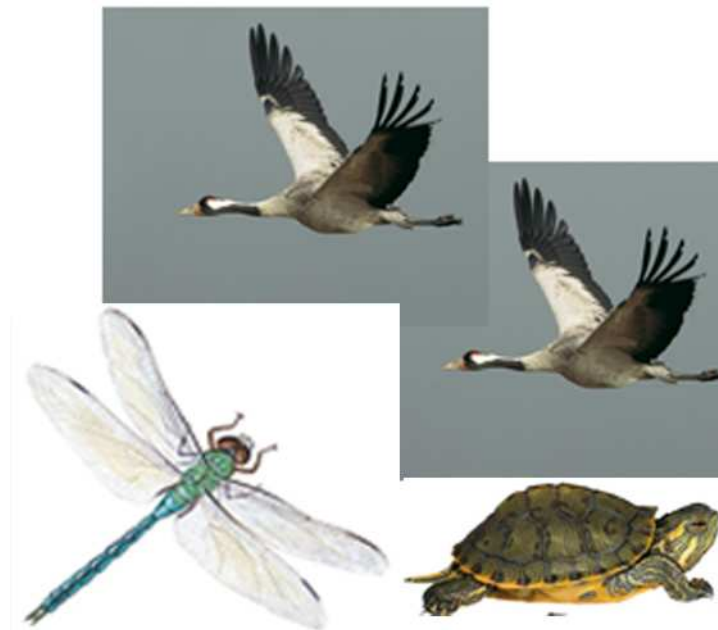
Þar sem x er fjöldi skjaldbaka og y er fjöldi trana. Skilyrðið að heildarfjöldi trana og skjaldbaka sé 70 má rita sem

$$x + y = 70.$$

Slíkt sjónarhorn virkar þó ekki ef um er að ræða barnaskólanemendur.

Annað mögulegt, velþekkt verkefni er um trönu, skjaldböku og drekaflugur. Í því verkefni er ekki einungis tekið tillit til fóta heldur einnig vængja (sjá mynd 3). Við getum þó fundið lausn á þessu verkefni með því að nota töflur svipaðar 1 og 2.

Ábending: Ef drekaflugur eru 9, heildarfjöldi trana og skjaldbaka er 35, og heildarfjöldi fóta trana og skjaldbaka er 118 þá er hægt að beita lausninni á fyrra verkefninu til þess að finna fjölda trana og skjaldbaka.



Mynd 3: Verkefni fyrir trönur, skjaldbökur og drekaflugur

Það er áhugavert að bera saman reynslu frá Japan við reynslu úr stærðfræðikeppnum fyrir hópa sem stærðfræðideildin í háskólanum í Pisa hefur skipulagt. Dæmi:

Dæmi 1. *Leðurblaka át 1050 drekaflugur samtals fjögur kvöld í röð. Hvert kvöld át hún 25 fleiri en hún gerði kvöldið áður. Hversu margar drekaflugur át hún hvert kvöld? Leystu dæmið með bókstafareikningi.*

Það er ljóst að leysa má dæmið auðveldlega með því að láta x tákna fjölda drekafluga sem leðurblakan át fyrsta kvöldið. Þá höfum við einföldu jöfnuna:

$$x + (x + 25) + (x + 50) + (x + 75) = 1050$$

þ.a. $4x + 150 = 1050$ og við fáum $x = 225$.

Meðan vinna stærðfræðistofunnar í Pisa stóð yfir var sérstakur Flash leikur með borinn saman við dæmin hér að ofan. Leikurinn tengist eftirfarandi Díofantískri jöfnu:

$$Bx = A + Cy, \quad (3)$$

þar sem A, B, C eru náttúrulegar tölur sem við veljum í upphafi leiksins: Breyturnar x, y má túlka með tveimur tökkum, rauðum og grænum (þeir birtast eftir að upphafstölur hafa verið settar inn, sjá mynd 6).

Ef smellt er á græna takkan þá samsvarar það aðgerðinni

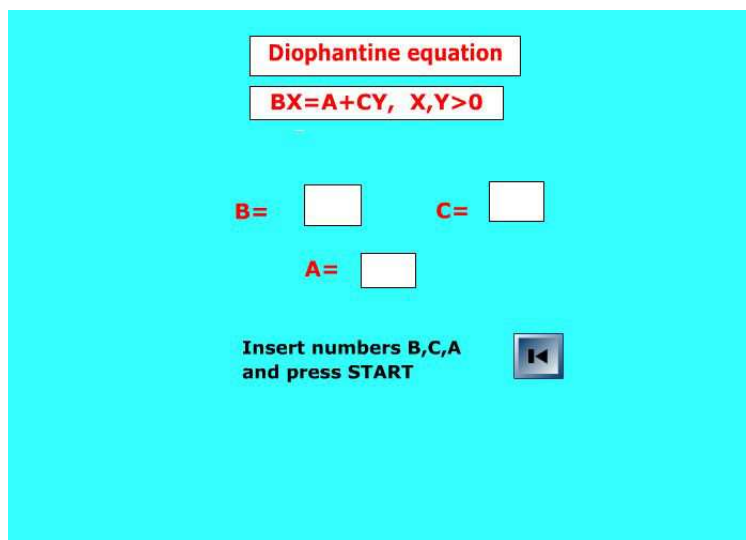
$$x \Rightarrow x + 1,$$

eða

$$Bx \Rightarrow Bx + B.$$



Mynd 4: Verkefni um leðurblökur og drekaflugur



Mynd 5: Leikur með Díofantosarjöfnu

Ef smellt er á rauða takkann samsvarar það aðgerðinni

$$y \Rightarrow y + 1,$$

eða

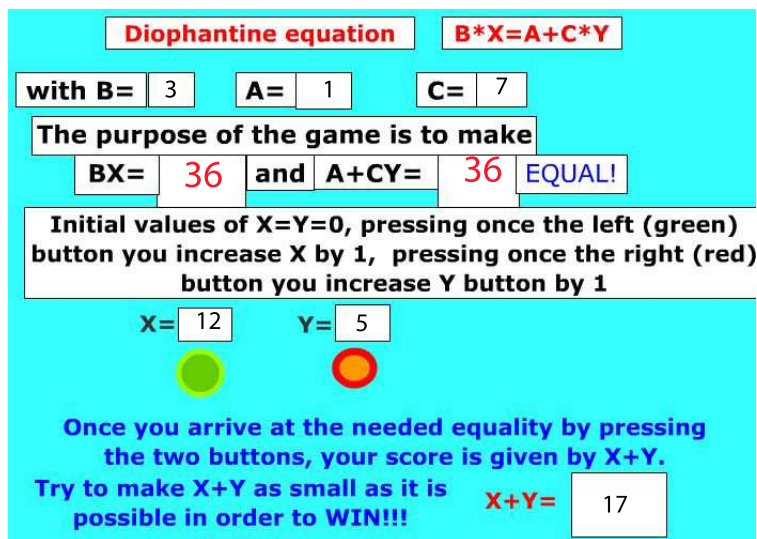
$$Cy \Rightarrow Cy + C$$

Leikurinn fer þannig fram að kennarinn gefur tölurnar B, C og A , nemandinn (spilarinn) velur sér sína leikáætlun: smella x -sinnum á græna takkann og y -sinnum á rauða takkann, forritið reiknar $Bx - Cy$ og ef þessi tala er sú sama og A þá lýkur leiknum og heildarfjöldi aðgerða

$$x + y$$

er sýndur á skjánum.

Stigin eru nákvæmlega talan $x + y$ og tilgangur leiksins er að hafa sem minnsta summu $x + y$. Ef til dæmis valið er $B = 3, C = 7, A = 1$ með lausn $x = 12, y = 5$ fást $12 + 5 = 17$ stig. Sjá mynd 6.



Mynd 6: Leikur með Díofantosarjöfnu

Hægt er að finna betri lausn, $x = 5, y = 1$ með stigafjöldann $5 + 2 = 7$.

Í stærðfræðistofunni voru ýmsar mögulegar spurningar ræddar:

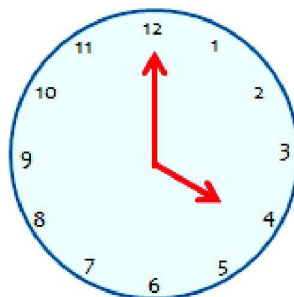
- Finndu þrenndir A, B, C þ.a. Díofantosarjafnan hafi enga lausn;
- Finndu nauðsynleg og nægjanleg skilyrði þ.a. Díofantosarjafnan hafi a.m.k. eina lausn;
- Finndu algrím til að vinna eða til að finna besta $x + y$

Niðurstaða þessarar tilraunar til þess að blanda saman ítalskri og japanskri kennslureynslu lofar góðu og sýnir möguleika á frekari þróun.

3 Verkefni sem hægt er að þróa frekar

Á mynd 7 er kynntur möguleiki á verkefni sem hægt er að vinna með.

Klukkan er 4 núna.
Hvenær munu vísarnir tveir mætast?



Mynd 7: Klukkuverkefni

Mögulegar umræður og lausnir má finna með því að nota eftirfarandi.

Ábending. Á hverri mínútu snýst hver vísir klukkunnar réttisælis um

$$\text{Langi vísirinn : } 360^\circ/60 = 6^\circ,$$

$$\text{Stutti vísirinn : } 30^\circ/60 = 0.5^\circ.$$

Þar af leiðandi, á hverri mínútu minnkar hornið milli vísanna um

$$6^\circ - 0.5^\circ = 5.5^\circ.$$

Hornið milli vísanna tveggja kl. 4 er 120° . Þar af leiðandi fæst

$$120/5.5 = 21.81818181$$

Svar.

$$4 : 21 : 49$$

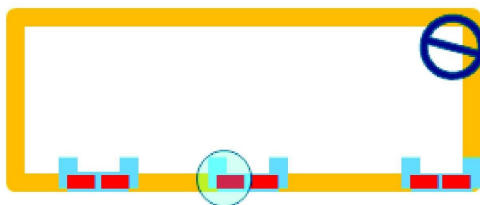
Á mynd 8 sést önnur hugmynd sem kynnt var og rædd í stærðfræðistofunni

Spurning 3

Horðu vandlega á hurð rútunnar í Písa.

Ef þú horfir á rútuna ofanfrá,

hvernig hreyfist punktur á hurðinni?



Mynd 8: Hurðaverkefnið

Þátttakendur stofunnar fengu eftirfarandi tillögu: reyndu að horfa í kring um þig og kynna til sögunnar eitthvert stærðfræðilíkan og verkefni. Nokkur af mest notuðu farartækjunum í Pisa eru rútur af eldri kynslóð sem hafa hurðaopnunarkerfið sem sýnt er á mynd 8. Í vissum skilningi má tengja verkefnið við nokkur dæmi sem sýnd höfðu verið þátttakendum stofunnar. Meðal þeirra dæma var eftirfarandi verkefni tekið úr kaflanum „Astronomy and instruments to draw quadratic curves” í [2].

Dæmi 2. (sjá kaflann "Astronomy and instruments to draw quadratic curves" í [2]). Nemandi hins fræga Galileo Galilei uppgötvaði nýja plánetu sem ferðast á sporbaugslaga braut um sólu, með hálfása a og b . G.r.f. að athugandi sé staðsettur á punkti í plani sporbaugsins þannig að sporbaugurinn sjáist frá þeim punkti við 90° horn. Reiknið fjarlægðina frá miðju sporbaugsins að punkti athugandans.

Hægt er að nota Kartesarhnit og finna útreiknaða lausn með því að lýsa, með jöfnu, mengi punkta þar sem sporbaugurinn sést undir réttu horni. Verkefni af þessari gerð má finna á mismunandi stöðum. Í [4] er til dæmis að finna nokkur spennandi dæmi í tengd keilum. Þar sem hagnýt reynsla nemanda í framhaldsskóla er ekki mikil, ákváðum við í verkefnagerðarstofunni að halda

okkar við stefnuna úr [1] og [2]. Hægt er að nota GeoGebru til að leysa dæmi (2). Aftur á móti reyndu japanskir starfsbræður okkar, sem höfðu enga vitneskju um tilvist GeoGebru, aðra aðferð byggða á útbreiddri upplýsingatækni sem notuð er í þeirra kennslustofum, þ.e.a.s. PowerPoint.

Heimildir

- [1] Georgiev, V., Mushkarov, O., Ulovec, A., Dimitrova, N., Mogensen, A., Sendova, E. MEETING in Mathematics, Demetra Publishing House, Sofia, 2008
- [2] A. Ulovec, J.Anderson, S. Čeretková, N. Dimitrova, V. Georgiev, O.Mushkarov E Sendova, *MATH to EARTH* 2010.
- [3] Kajikawa,*needs translation from Japanese*
- [4] J. Šunderlk and E. Barcková, *Best spot - investigation with circles*, chapter in this book.
- [5] M. Yoshida (revised and commented by S. Ohya) "Jinkoki", Iwanami Shoten, Japan, 1977.