Около теоремата на Наполеон

Владимир Георгиев, Олег Мушкаров

1 Теоремата на Наполеон-малко история

Известно е, че Наполеон е бил любител на елементарната математика и е познавал редица известни математици. Например, негов приятел е бил италианският математик Лоренцо Маскерони, който пръв разглежда задачи за геометрични построения, използващи само пергел. Интересна задача на Наполеон в тази насока е да се построи центърът на дадена окръжност само с пергел. Тук няма да се спираме на нейното решение, а ще отбележим само, че по времето на Ренесанса (1300г.-1600г.) подобни задачи са възниквали от чисто практически въпроси. Ето няколко примера на важни изобретения и открития от този период:

- Механичния часовник;
- Артилерията - първото оръдие за изстрелване на ракети е изобретено от английския инженер Уилям Конгреив (1670 - 1729);
- Печатната преса - изобретена е от Йоханес Гутенберг през 1440 г.;
- Компаса - за първи път е използван от китайския пътешественик Ченг Хе(1371-1435);
- Микроскопа - изобретен е от холандския майстор на очила Ханс Янсен през 1590 г.;
- Тапетите - първата фабрика за хартия е построена в Англия през 1496 г.;
- Подводницата - първият проект е на Леонардо да Винчи, но за първи път подводница е построена от Корнелиус ван Дребел през 1624 г.;
- Кибрита - открит е от Роберт Бойл през 1680 г.;
- Очилата - първите очила са разработени от италианския изобретател Салвино Д'Амате през 1284 г.

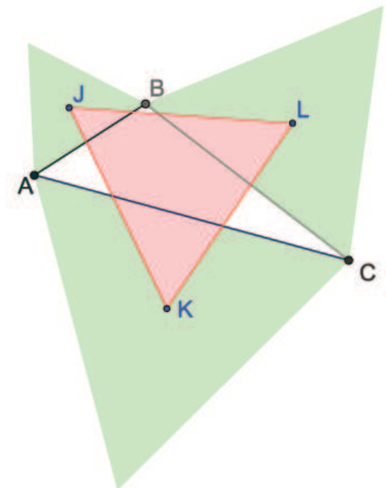
Важността на тези изобретения и фактът, че те съществено са променили реалния живот на хората обясняват защо някои известни математически задачи от този период са свързани с решаването на нови практически проблеми.

Друг пример е следното предизвикателство на П.Ферма(1601-1665) към Е. Торичели (1608-1647), изобретателя на барометъра: *Да се намери точка в равнината на*

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein

даден триъгълник, за която сумата на разстоянията и до върховете на триъгълника е минимална. Торичели дава няколко решения на тази екстремална геометрична задача. В едно от тях той отбелязва, че окръжностите, описани около равностранните триъгълници, построени външно върху страните на триъгълника се пресичат в една точка, която дава решение на задачата. В съвременната математическа литратура тази точка се нарича точка на Торичели-Ферма на дадения триъгълник.

Редица забележителни математически твърдения се приписват на Наполеон Бонапарт (1769-1821), въпреки че в известните ни източници връзката му с тях се поставя под въпрос. Трябва да се отбележи обаче, че математиката разцъфтява в следреволюционна Франция и по това време математиците се радват на голямо уважение. Например известният математик Лаплас е бил министър на вътрешните работи при Наполеон.



Фигура 1: Теорема на Наполеон

Следното твърдение (известно като теорема на Наполеон) е тясно свързано със задачата на Ферма (виж [14]), формулирана по-горе.

Теорема 1.1. *Върху страните на триъгълник са построени външно (вътрешно) равностранни триъгълници. Да се докаже, че техните центрове са върхове на равностранен триъгълник.*

Наистина е изненадващо, че видът на получения триъгълник не зависи от вида на първоначалния триъгълник. Но той зависи от вида на построените върху страните триъгълници–той е равностранен винаги когато построените триъгълници са такива. Съответният Geogebra файл може да се намери в следния линк Теорема на Наполеон.

Това е нашата изходна точка, като главната ни цел е разработването на конкретни дидактични материали (на базата на системата Geogebra), които могат да се използват в:

- курсове за подготовка и повишаване на квалификацията на настоящи и бъдещи учители по математика;
- класната работа.

Нашият интерес към теоремата на Наполеон е предизвикан и от факта, че тя не е много известна сред италианските учители по математика.

2 GeoGebra симулации около теоремата на Наполеон

Ние използваме системата Geogebra, защото тя дава приятен и лесен начин за чертане на разнообразни геометрични конфигурации.

В динамичното приложение точките A, B, C могат да се движат произволно като върхове на триъгълник. То може да се активира на следния линк Теорема на Наполеон. Приложението е подготвено съвместно със студентката Сара Леал Венегас в математическата лаборатория *Съставяне на задачи* , организирана в Университета на Пиза през пролетта на 2011 г.

Като първи пример на въпрос, който може да се постави при използването на динамичната конструция предлагаме следния:

- Вярно ли е, че отношението на лицата на $\triangle\ JKL$ и $\triangle\ ABC$ на Фигура 1 е постоянно?

На този въпрос може лесно да се отговори като се използва Geogebra. Движейки точката A така, че в крайното положение точките A, B, C да са колинеарни виждаме, че лицето на $\triangle\ JKL$ може да остава постоянно, докато лицето на $\triangle\ ABC$ клони към 0. Следователно отговорът е отрицателен.

Друг въпрос, свързан с горния, е следния:

- Да се намери лицето на $\triangle\ JKL$ или еквивалентно, да се намери неговата страна.

Този пример показва как може да "скочим"от приложения на Geogebra към по-абстрактни въпроси, които се нуждаят от чисто математическа обосновка и изчисления без използване на IT средства.

Връщайки се към теоремата на Наполеон ще отбележим, че в лабораторията за съставяне на задачи бяха изследвани следните варианти за нейното обобщаване:

- вместо равнострани триъгълници външно се строят квадрати;
- вместо триъгълници се разглеждат четириъгълници.

В първия случай отговорът беше намерен бързо с прилагане на системата Geogebra (виж Фигура 2),

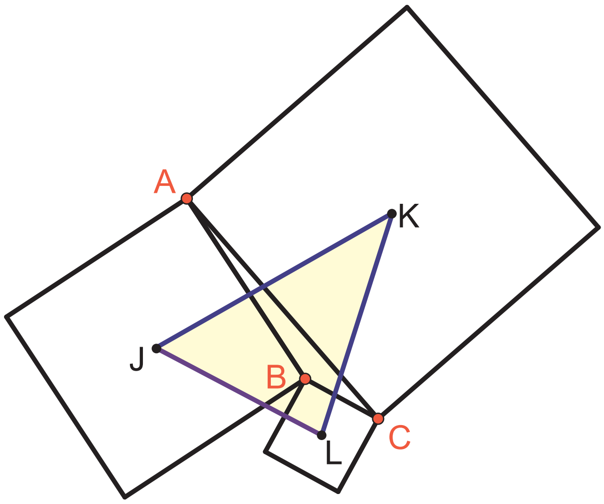
която може до се активира чрез следния линк Теорема на Наполеон с квадрати. Както се вижда, при приближаване на точките B и A (виж Фигура 3) $\triangle\ KLJ$ става близък до правоъгълен, тоест не е равностранен.

Като използваме същото прилжение виждаме, че медицентровете на триъгълниците ABC и JKL съвпадат. Наистина, следвайки подхода от Упражнение 5.2 изразяваме комплексните числа, съответстващи на точките L, K, J от Фигура 3, както следва

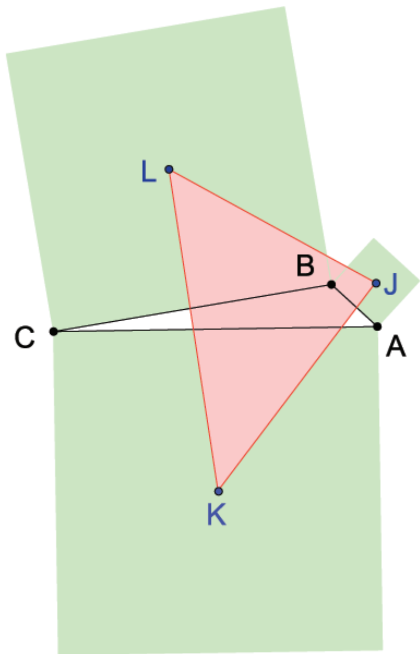
$$l = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) b + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) c, \quad k = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) c + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) a, \tag{1}$$

$$j = \left(\frac{1 \pm i}{2}\right) a + \left(\frac{1 \mp i}{2}\right) b. \tag{2}$$

Сега лесно се проверява, че $l + k + j = a + b + c$, т.е. медицентровете на $\triangle\ LKJ$ и $\triangle\ ABC$ съвпадат. Тъй като триъгълниците $\triangle\ BCL$, $\triangle\ CAK$ и $\triangle\ ABJ$ са равнобедрени и правоъгълни можем да формулираме следния въпрос:



Фигура 2: Geogebra замества триъгълници с квадрати



Фигура 3: Geogebra контрапример за обобщаване на теоремата на Наполеон
,

- Съществуват ли триъгълници ABC, за които $\triangle\ LKJ$ е равнобедрен и правоъгълен?

Предната динамична конструкция с Geogbra подсказва следния отговор:

Лема 2.1. *Не съществува $\triangle\ ABC$, за който $\triangle\ LKJ$ е равнобедрен и правоъгълен.*

Доказателство. Да допуснем, че $\triangle\ LKJ$ е равнобедрен и правоъгълен. Тогава

$$j = \frac{1 \mp i}{2} l + \frac{1 \pm i}{2} k.$$

Замествайки (1) и (2) в това равенство получаваме $\frac{i}{2}(a-b) = 0$, което е противоречие.

Друг естествен въпрос е следния:

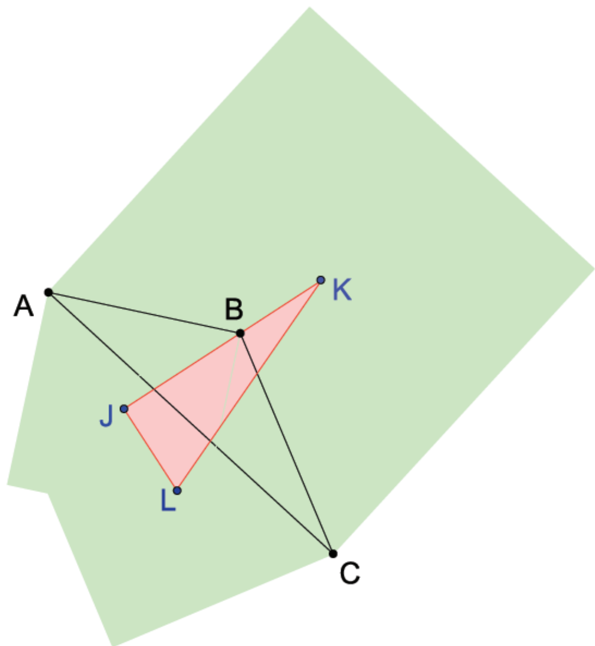
- Съществуват ли триъгълници ABC, за които $\triangle\ LKG$ е равностранен?

Читателят може да използва Лема 5.1 за да реши следното:

Упражнение 2.1. *Триъгълник LKJ е равностранен само когато $\triangle\ ABC$ е равностранен .*

По-интересен е въпросът кога $\triangle\ LJK$ е правоъгълен. След тестване с Geogebra можем да формулираме следната хипотеза:

Твърдение 2.1. *Триъгълник LKJ е правоъгълен с $\sphericalangle LJK = 90^o$ тогава и само тогава, когато квадратите са вътрешни за триъгълника и върховете A и B на $\triangle\ ABC$ лежат върху правите, определени от страните LJ и KJ на $\triangle\ LKJ$.*



Фигура 4: Правоъгълни триъгълници LKJ с положителна ориентация

Доказателство. Нека $\triangle\ ABC$ е ориентиран в отрицателна посока, тоест по часовниковата стрелка (виж Фигура 4) и да предположим, че точките L, K, J (центровете на вътрешните квадрати) са такива, че $\triangle\ BCL$, $\triangle\ CAK$ и $\triangle\ ABJ$ са ориентирани в същата посока. Като използваме Упражнение 5.4 заключаваме, че

$$l = \frac{1-i}{2}c + \frac{1+i}{2}b,$$

$$k = \frac{1-i}{2}a + \frac{1+i}{2}c,$$

$$j = \frac{1-i}{2}b + \frac{1+i}{2}a.$$

Условието, че $\triangle\, LKJ$ е правоъгълен , означава, че (виж Упражнение 5.3)

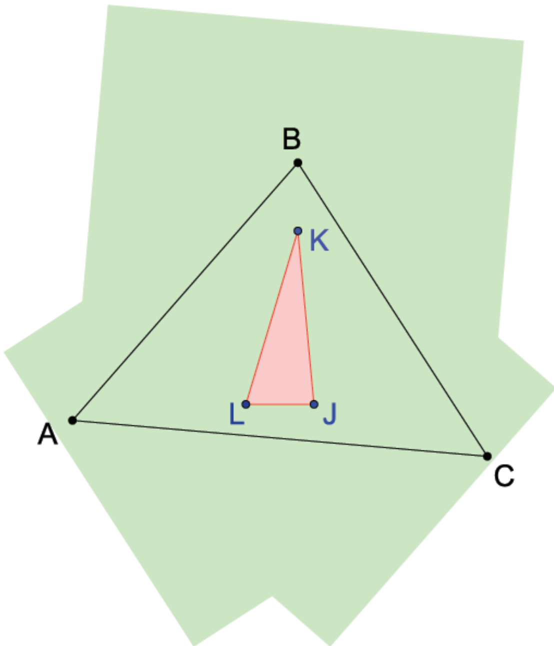
$$j = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2} l + \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2} k,$$

като $\lambda > 0$, ако $\triangle\, LKJ$ е ориентиран в положителна посока (Фигура 4) и $\lambda < 0$ – в обратния случай (Фигура 5). От горните равенства следва, че

$$a - l = \lambda(j - l)$$

и значи A лежи върху правата JL. Аналогично заключаваме, че точката B е върху правата JK.

Предлагаме на читателя да докаже обратното твърдение.



Фигура 5: Правоъгълни триъгълници LKJ с отрицателна ориентация

3 Доказателство на теоремата на Наполеон с комплексни числа

Сега сме готови да завършим доказателството на теоремата на Наполеон. Използвайки означенията на Фигура 1 и Лема 5.2, получаваме

$$l = w_1 b + w_2 c,\ \ k = w_1 c + w_2 a, \quad j = w_1 a + w_2 b, \tag{3}$$

където

$$w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}.$$

От тези равенства следва, че медицентровете на $\triangle\, LKJ$ и $\triangle\, ABC$ съвпадат, защото от (11) и (3) получаваме,

$$l + k + j = a + b + c.$$

Без ограничение можем да предполагаме, че

$$a + b + c = 0, \tag{4}$$

което влече

$$l + j + k = 0.$$

Нашата цел е да покажем, че

$$l = z_1 j + z_2 k, \tag{5}$$

защото от Лема 5.1 ще следва, че $\triangle\ IGH$ е равностранен. От друга страна, като заместим l, k, j от равенство (3) в (5), получаваме

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2)a + (w_1 - z_1 w_2)b + (w_2 - z_2 w_1)c = 0. \tag{6}$$

Сравнявайки това равенство с (4), виждаме, че

$$-(z_1 w_1 + z_2 w_2) = (w_1 - z_1 w_2) = (w_2 - z_2 w_1)$$

и като вземем предвид равенствата

$$w_1 = \frac{z_1 + 1}{3}, w_2 = \frac{z_2 + 1}{3}, z_1 + z_2 = 1,$$

заключаваме, че е достатъчно да проверим равенствата

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = 1 - z_1 z_2 = 1 - z_1 z_2. \tag{7}$$

Те са изпълнени, защото от (10), получаваме

$$-z_1^2 - z_2^2 - 1 = z_2 + z_1 - 1 = 0,\ 1 - z_1 z_2 = 1 - 1 = 0.$$

Следователно равенството (7) е изпълнено и теоремата на Наполеон е доказана.

4 Някои обобщения на теоремата на Наполеон

Теоремата на Наполеон има редица обобщения. Например, построените триъгълници могат да имат произволна форма, т.е. да са подобни и еднакво ориентирани. Тогава техните медицентрове образуват подобен на тях триъгълник. В действителност не е необходимо да разглеждаме медицентровете. За произволен $\triangle\ ABC$ разглеждаме три външни точки A_1, B_1, C_1 , за които

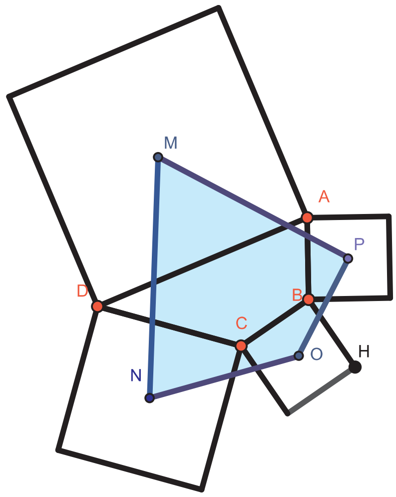
$$\sphericalangle AC_1B + \sphericalangle BA_1C + \sphericalangle CB_1A = 360^{\cdot}$$

Тогава $\triangle\ A_1B_1C_1$ е подобен на триъгълник с ъгли

$$\sphericalangle C_1AB + \sphericalangle B_1AC, \sphericalangle C_1BA + \sphericalangle A_1BC, \sphericalangle A_1CB + \sphericalangle B_1CA.$$

Доказателството на този интересен факт може да се намери например в ([12], стр. 178-181) и [5].

Директно обобщение на теоремата на Наополеон е получено първо от Барлоти [1] в 1955 г. и след това от Гребер [6] в 1980 г.. То гласи, че ако върху страните на n-ъгълник P се построят външно(вътрешно) правилни n-ъгълници, то техните центрове са върхове на правилен n-ъгълник тогава и само тогава, когато P е афинно-правилен многоъгълник, т. е. той е образ на правилен n-ъгълник при афинна трансформация на равнината. В следващото упражнение предлагаме на читателя да докаже теоремата на Барлоти-Гребер в случая $n = 4$.



Фигура 6: Четириъгълници и теорема на Наполеон

Упражнение 4.1. *Върху страните на четириъгълник външно са построени квадрати. Да се докаже, че:*

(а) Центровете на квадратите са върхове на четириъгълник с равни и перпендикулярни диагонали.

(в) Центровете на квадратите са върхове на квадрат тогава и само тогава, когато първоначалният четириъгълник е успоредник.

Упътване. Нека a, b, c, d са комплексните числа, съответстващи на върховете на четириъгълника. За да докажете (а) изразете комплексните числа на центровете M, N, P, Q на квадратите чрез a, b, c, d и покажете, че $n - q = i(m - p)$. За (в) използвайте, че $MP \perp NQ$ за да заключите, че $MNPQ$ е квадрат точно когато $MN \parallel PQ$. Сега изразете това условие чрез a, b, c, d.

Накрая ще разгледаме едно обобщение на теоремата на Наполеон, мотивирано от Упражнение 2.1 .

Упражнение 4.2. *Върху страните на неравностранен триъгълник са построени външно правилни n-ъгълници. Да се докаже, че техните центрове са върхове на равностранен триъгълник само при $n = 3$.*

Упътване. Докажете и след това използвайте факта, че комплексните числа a, b, c са върхове на равностранен триъгълик тогава и само тогава, когато $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

5 Допълнение: Комплексни числа и геометрия

Една от основните трудности за първокурсниците в университетите е курсът (курсовете) по математика и по-конкретно липсата на опит за работа с тригонометрични функции и комплексни числа. Използването на последните при подготовката на бъдещите учители е сведено до минимум поради утвърденото мнение, че това е алгоритъм, който, макар и не много ясен, работи чрез прилагане само на формални алгебрични пресмятания.

По долу са изложени някои стандартни факти, изпозвани в предишните параграфи. Основната идея при използването на комплексните числа в геометрията е, че всяка точка A в равнината може да се отъждестви с комплексно число, което ще означаваме със същата малка буква a. Ако комплексното числото $a \in \mathbb{C}$ е умножено с реално число $\lambda > 0$, то трансформацията

$$a \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda a \in \mathbb{C}$$

е хомотетия с център началото O и коефициент λ. Аналогично умножението с $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ дефинира ротация на ъгъл φ с център O. Ще отбележим, че въртенето на ъгъл φ се извършва в положителна посока, т.е. обратно на часовниковата стрелка.

Всеки $\triangle ABC$ определя равенство от вида

$$a = z_1 b + z_2 c, \quad z_1 + z_2 = 1, \tag{8}$$

където $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Ясно е, че коефициентите z_1, z_2 са еднозначно определени ако $B \neq C$. Наистина, ако

$$z_1 b + z_2 c = \widetilde{z_1} b + \widetilde{z_2} c$$

и

$$z_1 + z_2 = \widetilde{z_1} + \widetilde{z_2} = 1$$

то

$$(z_1 - \widetilde{z_1})b = (\widetilde{z_2} - z_2)c.$$

Тъй като $b \neq c$ и $z_1 - \widetilde{z_1} = \widetilde{z_2} - z_2$, получаваме

$$z_1 = \widetilde{z_1}, z_2 = \widetilde{z_2}. \tag{9}$$

В сила е следната

Лема 5.1. *$\triangle ABC$ е равностранен точно когато равенството* (8) *е изпълнено при*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Доказателство. Можем да предположим , че комплексното число

$$m = \frac{b+c}{2},$$

отговарящо на средата на отсечката BC е числото 0. Тогава в зависимост от ориентацията на $\triangle ABC$ имаме

$$a = \pm i \tan 60^o b = \pm i\sqrt{3}b,$$

тъй като A се получава с ротация на $\pm 90^o$ (т. е. умножение по $\pm i$) и хомотетия (т.е. с умножение) с коефициент $\tan 60^o = \sqrt{3}$.

Забележка 5.1. *Числата* z_1, z_2 *са комплексните корени на уравнението* $z^3 = 1$ *и изпълняват равенствата*

$$z_1 + z_2 = 1, z_1 z_2 = 1, z_1^2 = -z_2, z_2^2 = -z_1. \tag{10}$$

Забележка 5.2. *Равенствата* (8) *са много полезни и могат да се използват за получаване на различни версии на класическата теорема на Наполеон.*

Упражнение 5.1. *Да се намерят необходими и достатъчни условия в термините на коефициентите* z_1, z_2 *в* (8) *така, че* $\triangle ABC$ *да е правоъгълен с* $\sphericalangle A = 90^o$.

Упътване. $\triangle ABC$ е правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$ точно когато

$$c - a = (b - a)i\lambda$$

за реално число $\lambda \neq 0$. От това равенство и (8) следва, че

$$(z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda)(c - b) = 0,$$

откъдето

$$z_1 - i\lambda z_1 + i\lambda = 0.$$

Отговор.

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1 + \lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1 + i\lambda}{1 + \lambda^2}$$

за някакво реално число $\lambda \neq 0$.

Упражнение 5.2. *Да се намерят необходими и достатъчни условия в термините на коефициентите* z_1, z_2 *в* (8) *така, че* $\triangle ABC$ *да е равнобедрен и правоъгълен с* $\sphericalangle A = 90^o$.

Отговор.

$$z_1 = \frac{1 \mp i}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

В следващата лема е намерен медицентърът на равностранния триъгълник от Лема 5.1.

Лема 5.2. *Ако* $\triangle ABC$ *е равностранен и равенството* (8) *е изпълнено с*

$$z_1 = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1},$$

то за неговия медицентър имаме

$$\frac{a + b + c}{3} = w_1 b + w_2 c,$$

където

$$w_1 = \frac{(z_1 + 1)}{3}, w_2 = \frac{(z_2 + 1)}{3}.$$

Ние пропускаме доказателството на горното равенство.

Да отбележим, че от равенството (10) следва, че

$$w_1 + w_2 = 1. \tag{11}$$

Сега ще дадем по-точно описание на точките L, K, J на Фигура 1. На нея триъгълникът ABC е ориентиран по часовниковата стрелка и е важно да се отбележи, че $\triangle\ ABJ$, $\triangle\ BCL$ и $\triangle\ CAK$ имат една и същата ориентация.

В сила е следната модификация на Лема 5.1 с отчитане на ориентацията.

Лема 5.3. *$\triangle ABC$ е равностранен с положителна ориентация (обратна на часовниковата стрелка) точно когато равенството* (8) *е изпълнено с*

$$z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_2 = \overline{z_1}.$$

Аналогично, Упражнения 5.1 и 5.2 приемат следния вид:

Упражнение 5.3. *$\triangle ABC$ е правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$ и положителна ориентация, точно когато*

$$a = z_1 b + z_2 c,$$

където

$$z_1 = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2}, z_2 = 1 - z_1 = \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}$$

за някакво реално число $\lambda > 0$.

Забележка 5.3. *Равенството*

$$a = \frac{\lambda^2 - i\lambda}{1+\lambda^2} b + \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2} c$$

може да се запише във вида

$$a = \frac{1+i\mu}{1+\mu^2} b + \frac{\mu^2 - i\mu}{1+\mu^2} c$$

след субституцията

$$\mu = -\frac{1}{\lambda}.$$

Упражнение 5.4. *$\triangle ABC$ е равнобедрен и правоъгълен с $\sphericalangle A = 90^o$ и положителна ориентация, точно когато*

$$a = \frac{1-i}{2} b + \frac{1+i}{2} c.$$

Литература

[1] A. Barlotti, *Una proprieta degli n-agoni che si ottengonotransformado in una affinata un n-agono regulare*, Boll.Un.Mat.Ital, **10** (1955), 96-98.

[2] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, NY, 1961.

[3] J. Douglas, *On Linear Polygon Transformation*, Bull Amer Math Soc, **46** (1940), 551 – 560.

[4] R.H. Eddy and R. Fritsch, *The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle*, Math. Mag. **67**, (1994), 188 – 205.

[5] S. B. Gray, *Generalizing the Petr-Douglas-Neumann Theorem on N-Gons*, The American Mathematical Monthly, **110(3)** (2003), 210 – 227.

[6] L. Greber, *Napoleon's Theorem and the Parallelogram Inequality for Affine-Regular Polygons*, Amer. Math. Monthly, **87** (1980), 644-648.

[7] B. Grunbaum, *Metamorphosis of Polygons, in The Lighter Side of Mathematics*, R.K.Guy and R.E.Woodrow (eds), MAA, 1994.

[8] B. H. Neumann, *A Remark on Polygons, J London Math Soc*, **17** (1942), 165 – 166.

[9] T. Pappas, *Napoleon's Theorem*, The Joy of Mathematics. San Carlos, CA: Wide World Publ./Tetra, 1989.

[10] G. Polya, *Mathematical Discovery*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[11] F. Schmidt, *200 Jahre franzosische Revolution–Problem und Satz von Napoleon*, Didaktik der Mathematik **19**, (1990) 15 – 29.

[12] D. Wells, *You Are a Mathematician*, John Wiley & Sons, NY, 1981.

[13] J.E. Wentzel, *Converses of Napoleon's Theorem*, Amer. Math. Monthly **99** (1992), 339 – 351.

[14] $http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat\_point.shtml$