

Sådan findes geometriske mønstre som en leg ud fra dynamisk udforskning

Toni Chehlarova, Evgenia Sendova

Matematisk Institut, Videnskabsakademiet i Bulgarien

1 Indledning

Mange spændende geometriske opgaver vedrører et geometrisk sted - det sæt punkter, der opfylder en bestemt betingelse. Traditionelle opgaver om steder er begrænset til at finde enkle kurver. Med software inden for dynamisk geometri er der mulighed for langt mere avanceret udforskning.

I dette afsnit viser vi, hvordan *hvad nu hvis*-strategien kan anvendes på:

- en traditionel geometriopgave.
- generalisering af et kendt problem.

1.1 Se på en klassiker med et dynamisk perspektiv

Opgaven:

Hvad er det geometriske sted for midtpunkterne af de linjestykker, der går mellem et fast punkt inden for en cirkel med punkterne på cirklen?

Denne opgave kan løses ved at undersøge, hvordan det pågældende midtpunkt opfører sig, samtidigt med at segmentets slutpunkt på cirklen flyttes langs den.

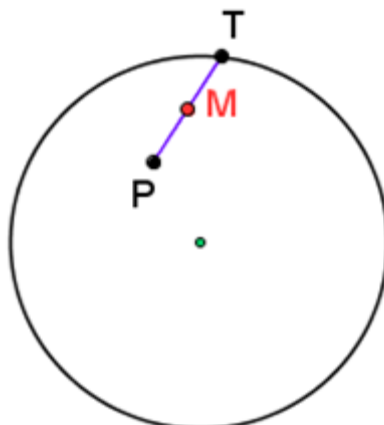
Man kan starte med en dynamisk konstruktion (f.eks. i *GeoGebra*):

Task 1. Tegn en cirkel og et punkt **T** på den (brug knappen **Cirkel** eller kommandoen **Cirkel**).

Task 2. Tegn derefter et punkt **P** inden i cirklen (med knappen **Punkt** eller kommandoen **Punkt**).

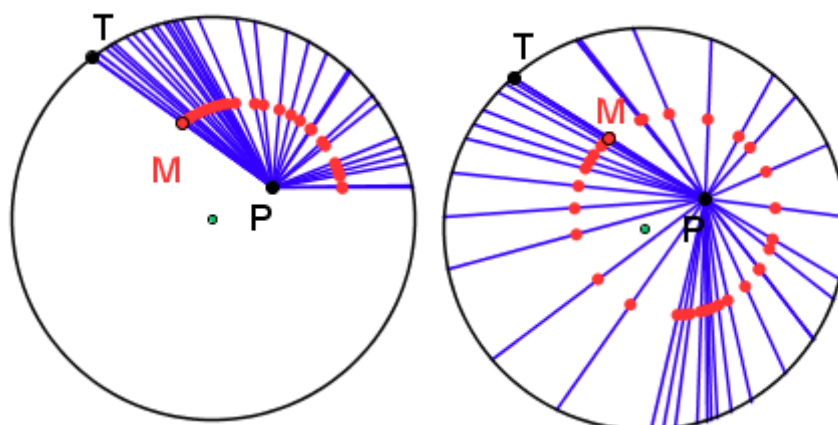
Task 3. Tegn til sidst midtpunktet **M** for linjestykker **PT** (ved at bruge funktionen eller kommandoen **Midtpoint**).

Konstruktionen bliver i stil med [denne](#):



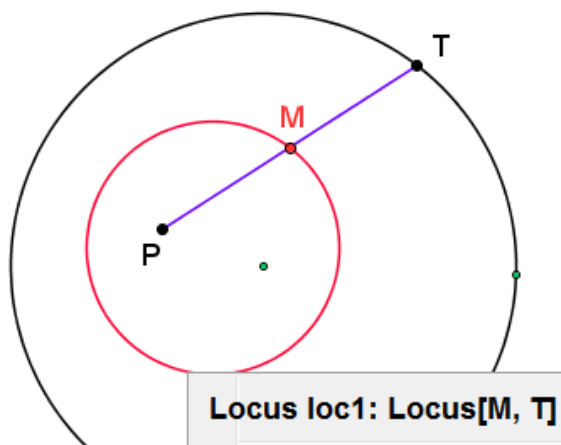
Task 4. Hold nu øje med, hvordan M 's spor udvikler sig. Dette gøres ved at tænde for sporet af M (og hvorfor ikke hele linjestykket PT) ved at højreklikke på M og vælge tænd spor og trække T langs med hele cirklen.

Det ses nu, at den facon, som M 's positioner danner i rækkefølge, ser ud som [et sæt punkter på en cirkel](#).



Man kan underbygge sin formodning om faconen på [det geometriske sted](#) på flere måder.

Task 5. Tegn det geometriske sted for M vha. funktionen **Locus** (under knappen **Linje**) eller kommandoen **Locus**.

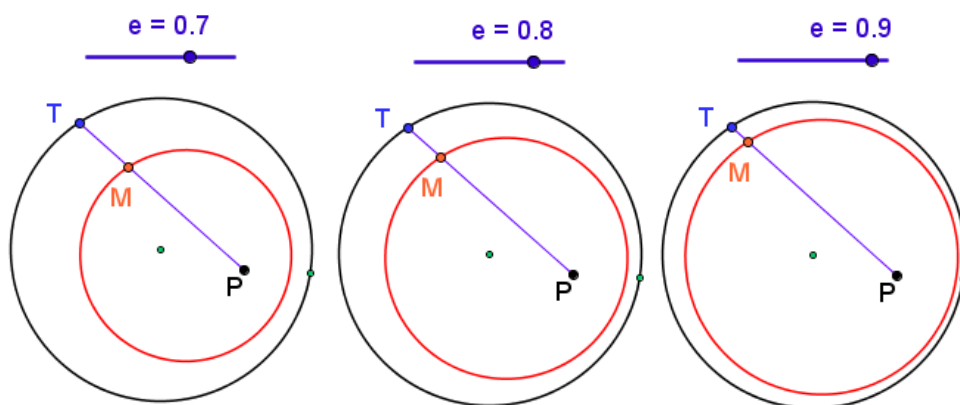


Legen er dog ikke slut. Det er på tide at stille flere *hvad nu hvis*-spørgsmål som f.eks. *Hvad nu hvis M ikke er midtpunktet, men deler segmentet op i et fast forhold? Hvad nu hvis P er uden for cirklen?*

Det kan måske lede en til at tro, at det geometriske sted i dette tilfælde snarere vil ligne en almindelig 2.-grads kurve (en parabel) eller en ellipse måske?

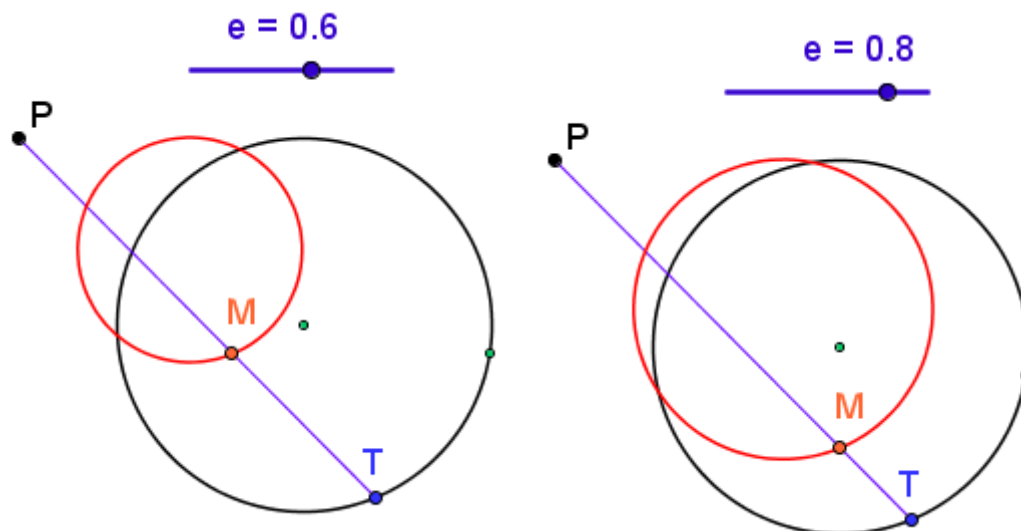
Udforskningsarbejdet kan generaliseres på en god måde:

Task 6. Tilføj en skyder for forholdet e , hvor M opdeler segmentet, dvs. $PM = e \cdot PT$ og under undersøg forskellige værdier af e :



Det geometriske sted ser ud til at være cirklen igen!

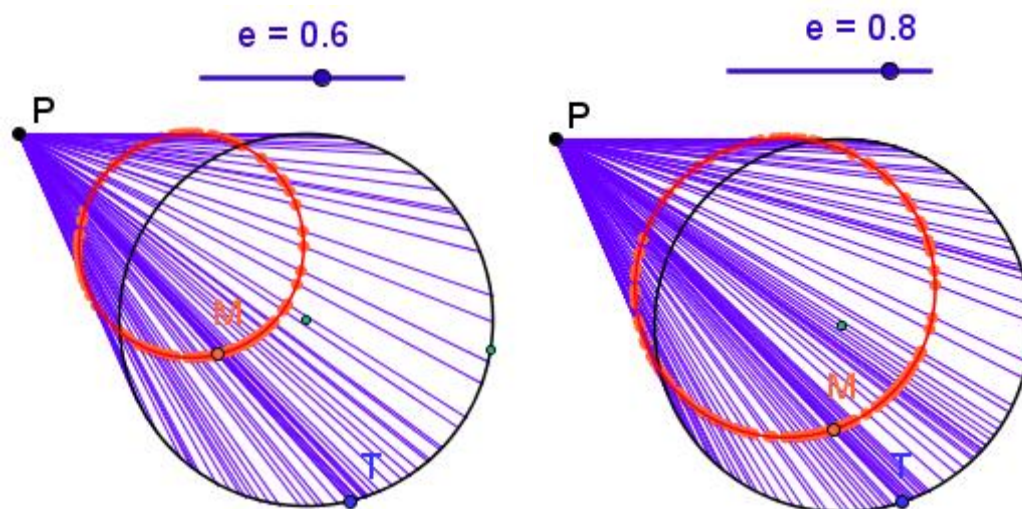
Task 7. Kontrollér, hvad der sker, hvis P er uden for cirklen.



Der fremkommer igen en cirkel!

Kommandoen **Locus** giver en ret god ide om faconen på det geometriske sted, men det fungerer kun på et sæt punkter. Hvad nu hvis man beslutter sig for at visualisere mængden af linjestykker for et punkt uden for cirklen?

Task 8. Tænd for funktionen **Trace mode** for segmentet **PT**, hvor **P** er uden for cirklen, og flyt **T** for forskellige (og derefter faste) værdier af **e**:



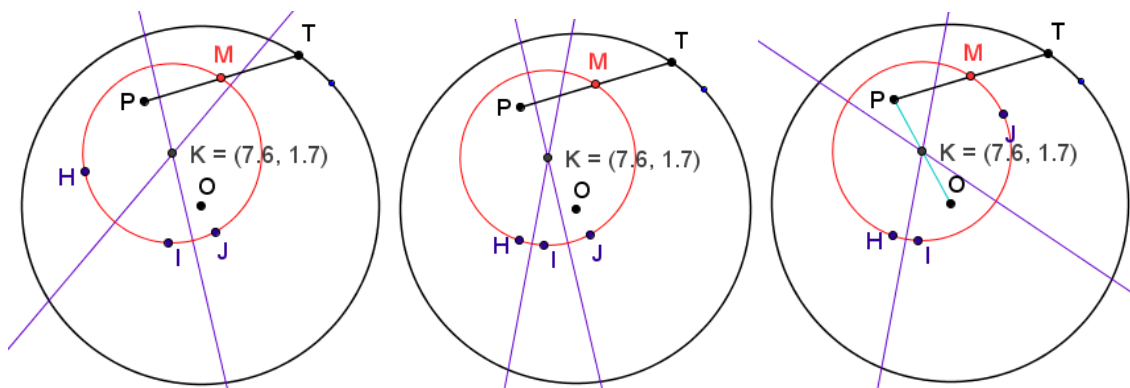
En interessant visuel effekt! Men kan man være helt sikker på, at **M** beskriver en cirkel? Hvad nu hvis det rent faktisk er en ellipse, som ligger meget tæt på en cirkel?

Før der læses videre, så prøv at udtænke forskellige måder, som formodningen kan bevises eller begrundes på.

En måde kan være (stadig eksperimenterende) at tegne 3 punkter (**I**, **J** og **H**) på cirklen, lade en cirkel passere igennem dem og kontrollere, om denne cirkel falder sammen med det geometriske sted.

En anden måde, som kunne være med til at bevise formodningen meget nøjagtigt på, er at observere nogle interessante egenskaber ved tegningen tilføjet nogle ekstra elementer:

Task 9. Tegn 3 punkter (**I**, **J** og **H**) på cirklen, derefter de vinkelrette halveringslinjer for segment **IH** og **IJ** og til sidst deres skæringspunkt **K**. Flyt nu nogle af punkterne **I**, **J** og **H**, og hold øje med koordinaterne for **K** samt længden af **KJ**, **KI**, **KH**. Hvad er forholdet mellem **K** og midtpunktet **O** i den oprindelige cirkel?



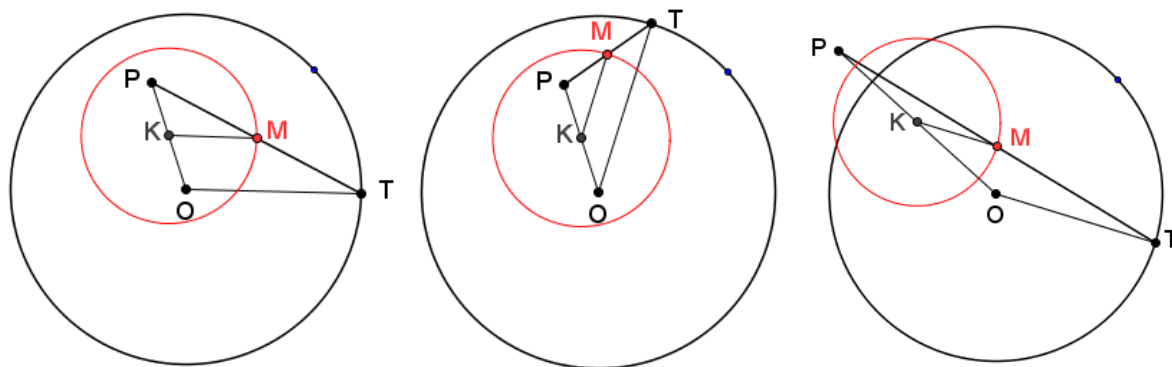
Ja, det ses nemt, at **K** fastholder sine koordinater. Derudover er **KJ** = **KI** = **KH**, hvilket viser eksperimentelt (men **mere overbevisende**), at det geometriske sted er en cirkel.

Man bør desuden have bemærket, at midtpunktet **K** for det geometriske sted er midtpunktet for **PO**, hvor **O** er midten af den oprindelige cirkel.

Nu kan man så helt sikkert bevise, at det geometriske sted er en cirkel med midten, som er midtpunktet **K** for **PO** (hvor **O** er midten af den givne cirkel), og en radius - halvdelen af radius for the givne cirkel.

Beviset

Lad **K** være midtpunktet af **PO**. Derefter er $\mathbf{KM} = \frac{1}{2}\mathbf{OT}$, dvs. midtpunktet **M**, en konstant afstand fra **K** (halvdelen af radiussen **OT** for den givne cirkel), hvor **T** flytter sig langs **O**.



Det geometriske sted er derfor en cirkel med et centrum **K** og en radius - halvdelen af radiussen for den givne cirkel.

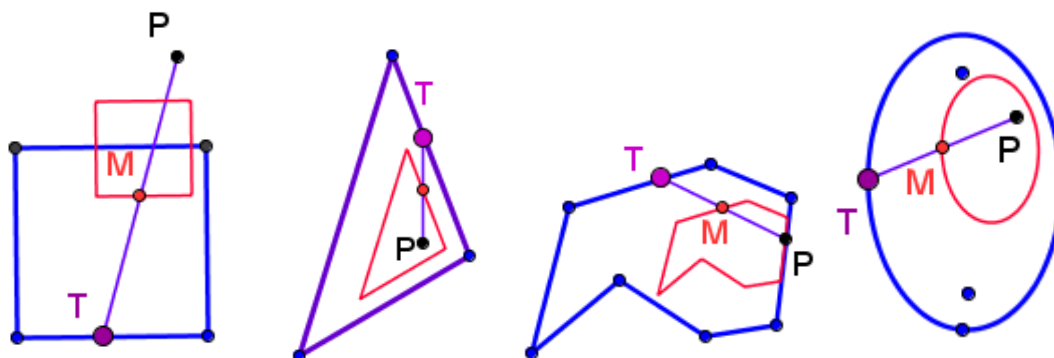
Task 10. Bevis læresætningen generelt for $\mathbf{PM} = e\mathbf{PT}$.

Task 11. Udskift cirklen med:

- [en firkant](#)
- [en trekant](#)
- [en vilkårlig regulær polygon](#)
- [en ellipse](#)
- en kurve efter eget valg

Task 12. Generaliser dine resultater

Hvis de studerende har lært om *dilatation* (i Bulgarien introduceres de til det et år efter, de først er stødt på det *geometriske sted*), kan de bruge det til at løse opgaverne, men det er passende, at de generaliserer deres fund (opgave 12, når de har resultaterne fra opgave 11:



Hvis man bruger strategien med at spørge *Hvad nu hvis*, ville man kunne fremavle en større lyst til udforskning i matematiktimerne. De studerende ville blive opmuntret til at udforske interessante fænomener i delpunkter, generalisere relativt enkle spørgsmål i forskellige retninger og endda angribe og generalisere udfordrende spørgsmål på højt niveau (bilag I).

2 Generalisering af et velkendt spørgsmål

I dette afsnit viser vi en fremgangsmåde, der er typisk for arbejdende matematikere: vi generaliserer et velkendt spørgsmål, hvorefter vi angriber det med de redskaber, vi mener er mest velegnede til formålet (i vores tilfælde med dynamiske konstruktioner, som vi har specialudviklet med tanke på *trinvis raffinering og berigelse*). Vi vil forsøge at systematisere vores udforskning, og vi reflekterer over de ideer, vi får. Fokus vil primært være på selve processen frem for at beskrive resultaterne. Derudover ville det glæde os, hvis det kunne opmuntre vores læsere til selv at angribe nogle af de åbne spørgsmål.

Her er udgangspunktet:

Et velkendt spørgsmål

Find det geometriske sted for centrum af de ligesidede trekanter, der er indlagt i en ligesidet trekant.

Vi forventer, at de fleste læsere er bekendt med det spørgsmål. En ambitiøs generalisering ville være:

En ambitiøs generalisering

Find det geometriske sted for centrum af en regulære m -goner, der er indlagt i en regulær n -gon, $m \leq n$.

Nedenfor skriver vi $(m;n)$ for at angive konstruktionen af en regulær m -gon, der indlagt i en regulær n -gon. Bemærk, at vi er ikke engang sikre på, for hvilken m og n $(m;n)$ konstruktionerne kan lade sig gøre.

Lad os indlede vores *angreb* med et mere beskedent spørgsmål, der omhandler tilfældet $(3;n)$ for $n = 3, 4$, osv.

Første angreb - tilfældet $(3;n)$

Find det geometriske sted for centrum af de ligesidede trekanter, der er indlagt i en regulær n -gon.

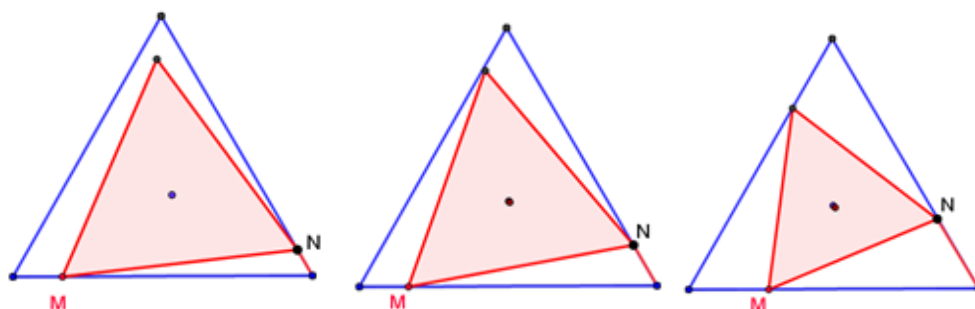
2.1 En primitiv (håndlavet) dynamisk model

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Vi konstruerer en ligesidet trekant, hvor to af toppunkterne er på n -gon, og flytter den tredje, så vi får en trekant, der er indlagt i en trekant.

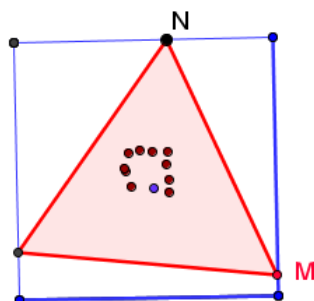
Men lad os starte med begyndelsen! For at få en fornemmelse af den dynamiske konstruktion, som man derefter ville kunne generalisere, er det naturligt at starte med det enkleste tilfælde ($n=3$) og fortsætte på "håndværksmæssig" vis.

- Vi vælger to vilkårlige punkter **M** og **N** på hver sin side af den givne (blå) trekant.
- Vi konstruerer derefter en ligesidet (rød) trekant med siden **MN** (det er ligegyldigt hvilken af de to).
- Vi flytter derefter punktet **N** (idet vi beholder **M** på dens aktuelle position), så den røde trekant kommer til at ligge inden i den blå. Midten af den røde trekant er det geometriske sted, vi leder efter.
- Gør nu det samme for den nye position for **M**.

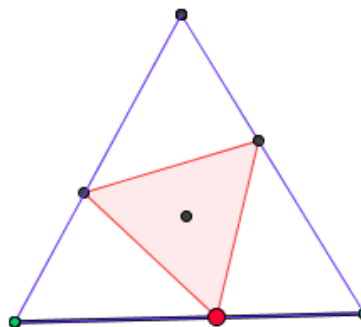
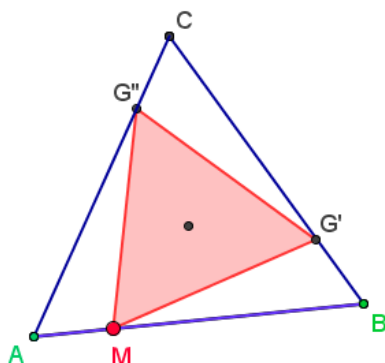


Vi kan således ved at bruge forskellige positioner efter hinanden for punkt **M** få en nogenlunde ide om det geometriske sted - i tilfældet (3:3) ser centrene ud til at falde sammen (eller i alt fald næsten).

Hvis vi gør nogenlunde det samme for tilfældet (3:4), ser centrene ud til at være en firkant. Men at tegne trekanten *i hånden* er en tidskrævende metode. (Og alligevel lidt bedre end at konstruere den i hånden med blyant og papir og kun se på et tilfælde, der endda kunne være misvisende pga. manglende nøjagtighed (bilag II).)



Konstruktionen kan automatiseres, hvis man ser lidt nærmere på konstruktionen (3:3). Det er helt naturligt at formode, at det geometriske sted i dette tilfælde er et enkelt punkt, der falder sammen med centrum af en given trekant.



Kongruensen mellem trekkanterne AMG'' og $BG'M$ bevirker $AM=BG'$. Vi kan derfor i dette konkrete tilfælde bruge en dynamisk konstruktion, der bygger på kongruens.

2.2 En automatiseret dynamisk model for konstruktionerne (3;3)

Her følger forskellige måder, hvorpå man kan oprette automatiserede modeller til konstruktionerne (3;3).

Første metode

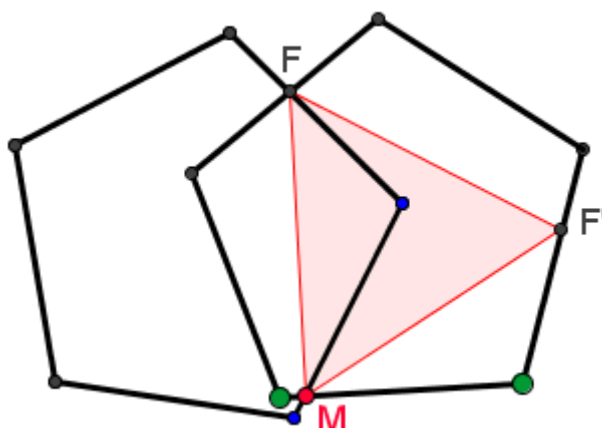
- Vi konstruerer et punkt M på konturen af en regulær 3-gon.
- Vi konstruerer en cirkel k med et centrum B og en radius AM .
- Vi kalder skæringspunktet for k og siden BC af n -gonen (i dette tilfælde trekanten ABC) for G' .
- Vi konstruerer G'' på samme måde.
- Vi forbinder punkterne M , G' og G'' , så de danner en trekant.

Anden metode

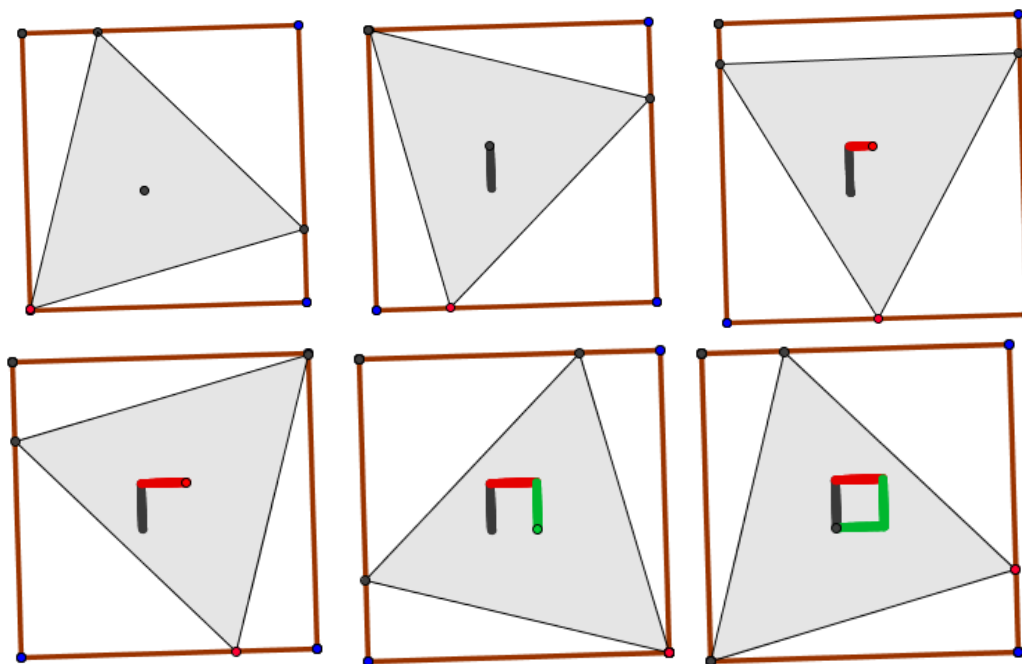
- Vi konstruerer et punkt M på konturen af en regulær 3-gon.
- Vi konstruerer billedet G' af M ved at dreje centrum - centrum af den givne trekant og vinklen 120° .
- Vi konstruerer derefter billedet G'' af G' ved at dreje centrum - centrum af den givne trekant og vinklen 120° .
- Vi forbinder punkterne M , G' og G'' , så de danner en trekant.

2.3 Flere dynamiske modeller

- Vi konstruerer et punkt M på konturen af en regulær n -gon.
- Vi konstruerer derefter billedet af n -gonen ved at dreje ρ med centrum M og vinklen 60° .
- Vi konstruerer skæringspunktet F (det vil være et andet toppunkt i den ligesidede trekant, hvis første toppunkt er M , og som er indlagt i n -gonen).
- Vi konstruerer derefter det tredje toppunkt som for-billedet F' af F .
- Vi forbinder M , F' og F for at få den ligesidede trekant, der indlagt i n -gonen.



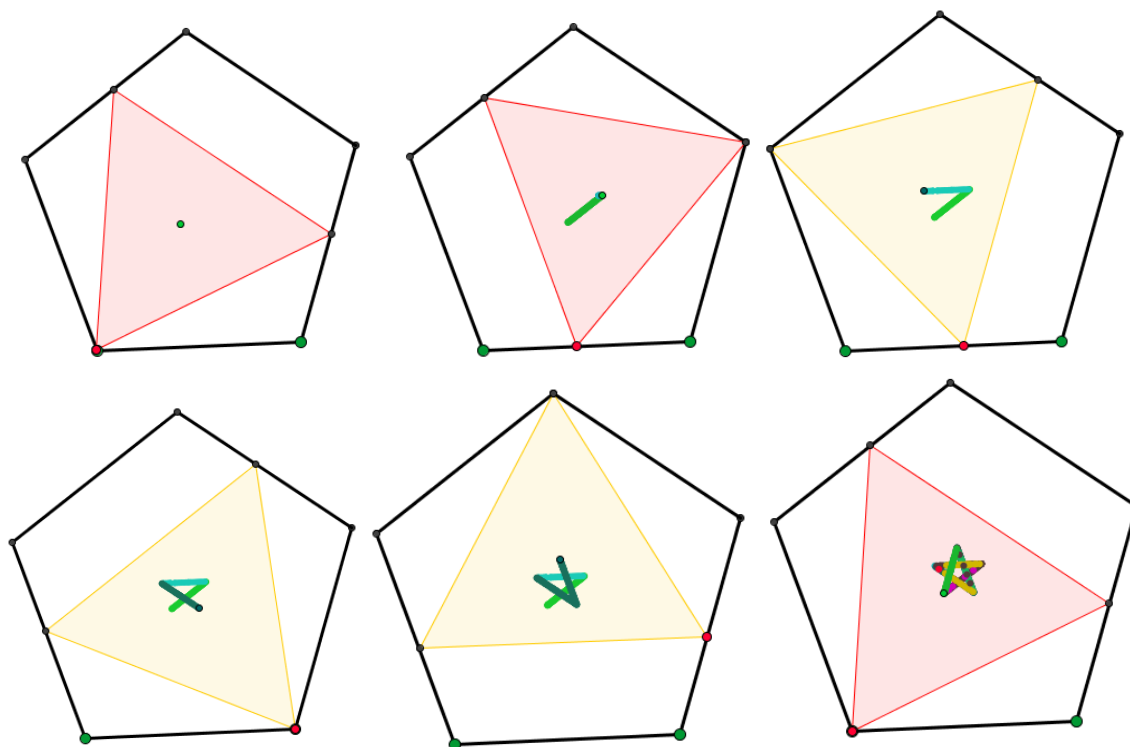
Her er nogle billeder af de spor, trekantens centrum i konstruktionen (3;4) har efterladt, da der blev flyttet på trekanten, der indlagt i trekanten:



Ved at flytte det røde punkt (**M**) til trekantens næste toppunkt falder sammen med en af kvadratets hjørner (dvs. den indtager sin startposition), kan vi se, at sporet danner en form, der ser ud som halvdelen af et kvadrat. På samme måde ses det, at hvis punkt M flyttes langs resten af siderne i kvadratet, efterlader centrum af trekanten et spor, som fuldender en kvadratlignende form, hvorefter sporet vil blive gentaget (tre gange).

Hvis det geometriske sted for konstruktionen (3;4) er et kvadrat, kan vi så formode, at det tilsvarende geometriske sted for konstruktionen (3;5) vil være en regulær pentagon?

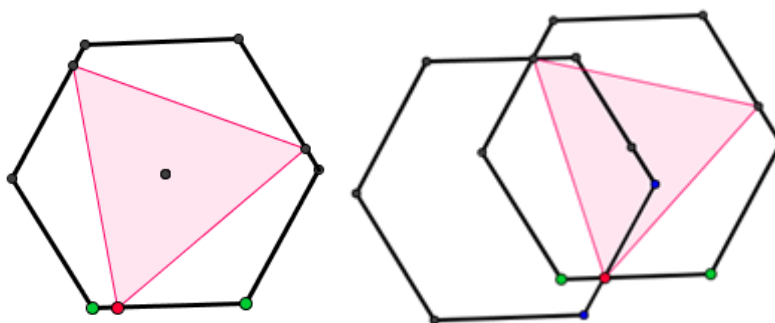
I sidstnævnte tilfælde er det tilstrækkeligt (igen som følge af symmetrien) at observere virkningen af at flytte det røde punkt på bare en del af pentagonen.



A-a-ah! Stadig 5 sider, men den ligner ikke en pentagon - snarere et pentagram! Så hvad vi antog for at være et kvadrat, kunne måske være en "firesidet stjerne".

Igen beskriver centrum af trekanten det geometriske sted tre gange, mens det røde punkt kommer hele vejen rundt om den oprindelige pentagon.

I tilfældet [\(3;6\)](#) viser det sig, at det geometriske sted er et enkelt punkt:



Sådan var det geometriske sted i tilfælde [\(3;3\)](#). På samme måde kunne vi formode, at det samme ville gælde for [\(3;9\)](#) og mere generelt for [\(3;3k\)](#).

Vi kunne lave en særskilt konstruktion for $(m; km)$.

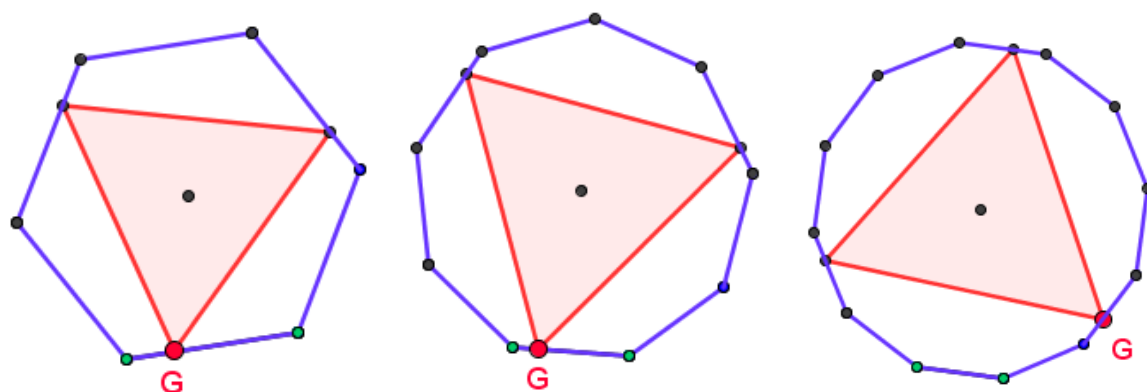
2.4 Yderligere udforskning, der giver indsigt

Model $(m; km)$

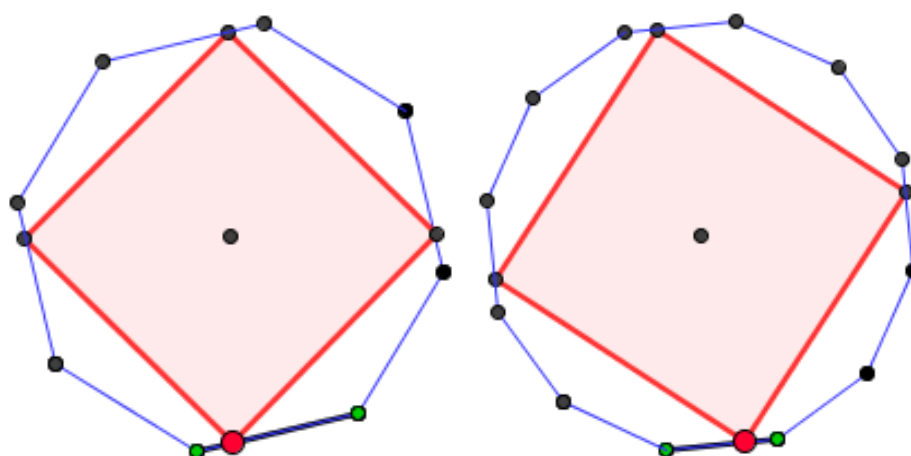
Vi er nu fristede til yderligere at udforske

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

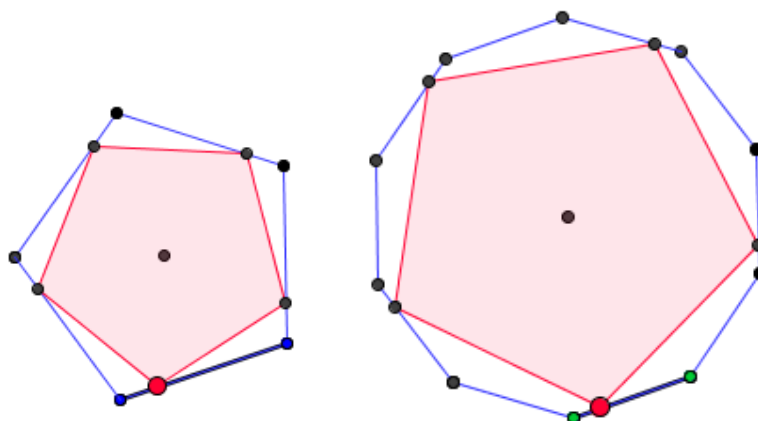
(3;3k)



(4;4k)



(5;5k)



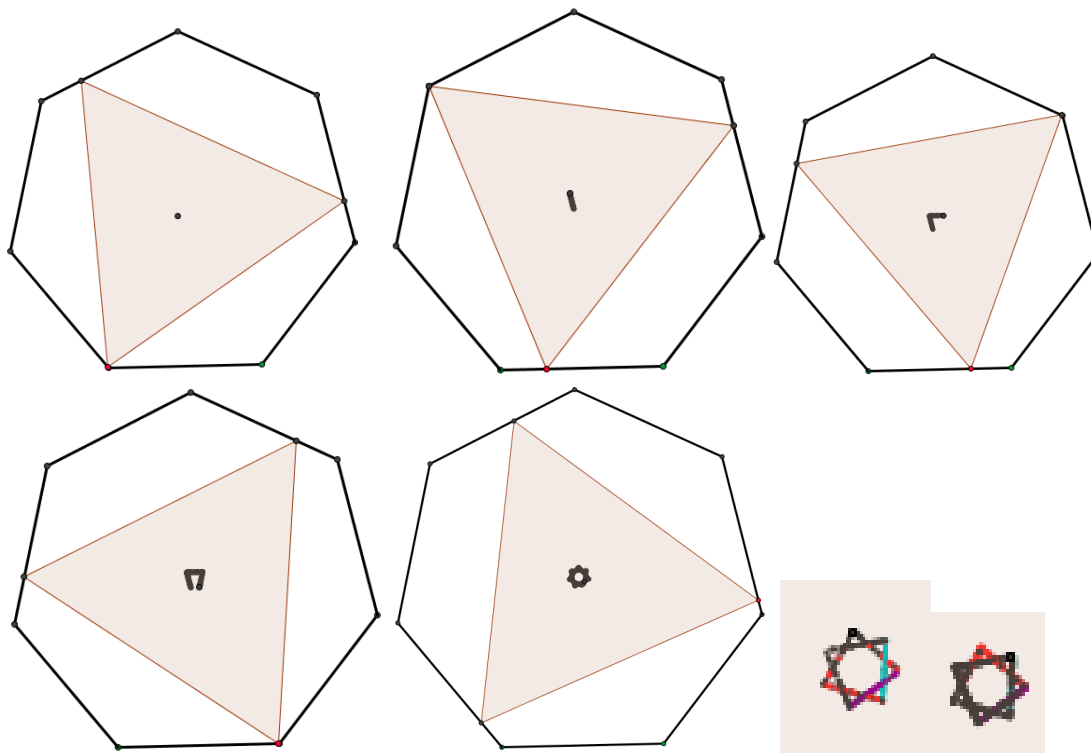
Den generelle formodning, vi kunne uddrage efter at have udforsket model $(m;km)$, er, at for hvert enkelt punkt G på n -gonen ($n=km$), er der en indlagt m -gon med et toppunkt G , og det geometriske sted, vi søger, er et enkelt punkt, der falder sammen med centrum af n -gonen.

Konstruktionerne $(m;km)$ kunne også opnås ved at gøre som i 2.2.

Lad os fortsætte med udforskningsarbejdet med model $(3;n)$.

Model (3;7)

Nu forventer vi, at der dukker en stjerne op, efterhånden som vi bevæger os hen ad heptagonens sider.



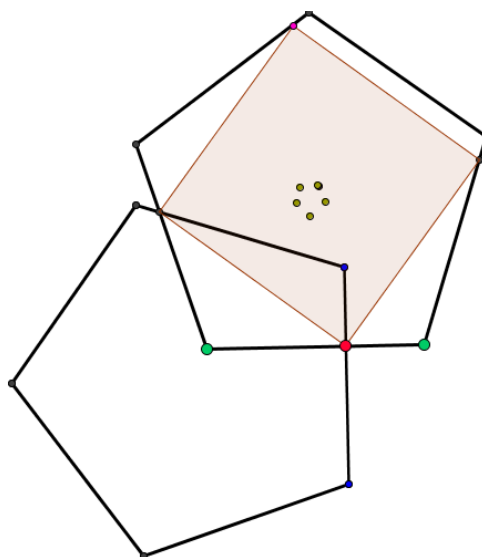
Under udforskningen af model $(3;n)$ begynder vi at formode, at det er muligt at indlægge en ligesidet trekant i alle regulære n -goner. Med andre ord er $(3;n)$ altid en mulig konstruktion.

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Det bliver spændende at se, hvad der sker med model $(4;n)$.

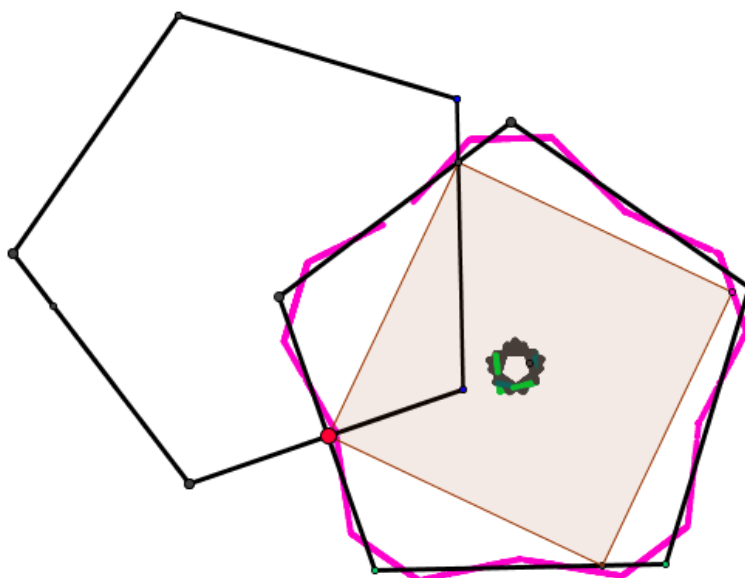
Model [\(4;5\)](#)

Dette er faktisk et indlagt kvadrat i en regulær pentagon:

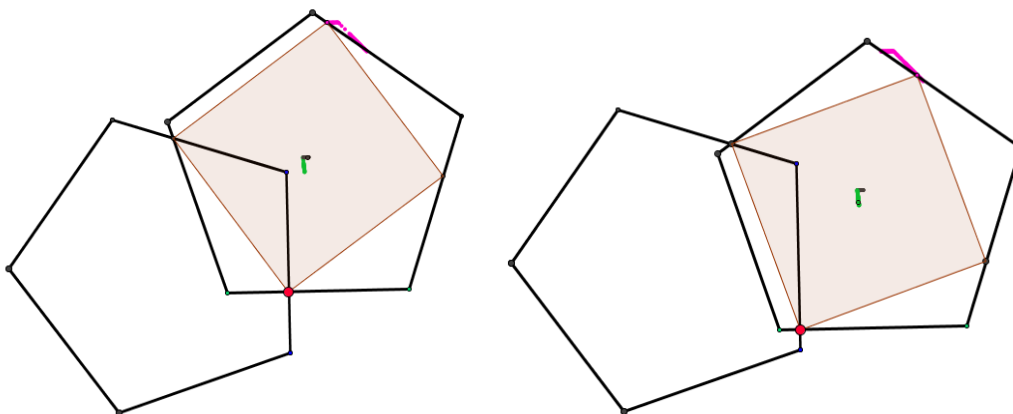


Her har den givne n -gon (en pentagon i dette tilfælde) og dens billede under 90° rotation igen et enkelt skæringspunkt, hvis for-billede er kvadratets tredje hjørne. Det eneste udestående punkt er nu at kontrollere, hvornår kvadratets fjerde hjørne er på den givne n -gon,

Her er det fjerde hjørne med lilla (i en [model](#)):



Nedenfor er flere positioner, der fører til et indlagt kvadrat:

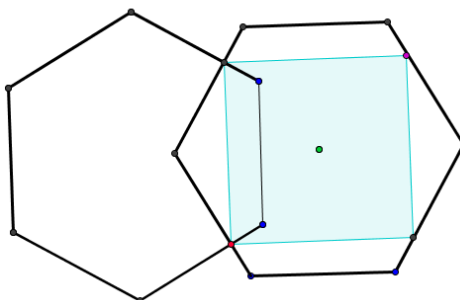


Lad os se nærmere på sporet efter centrum af dette kvadrat med tre hjørner på n -gonen.



Det er faktisk det geometriske sted for et indskrevet kvadrat i en regulær pentagon.

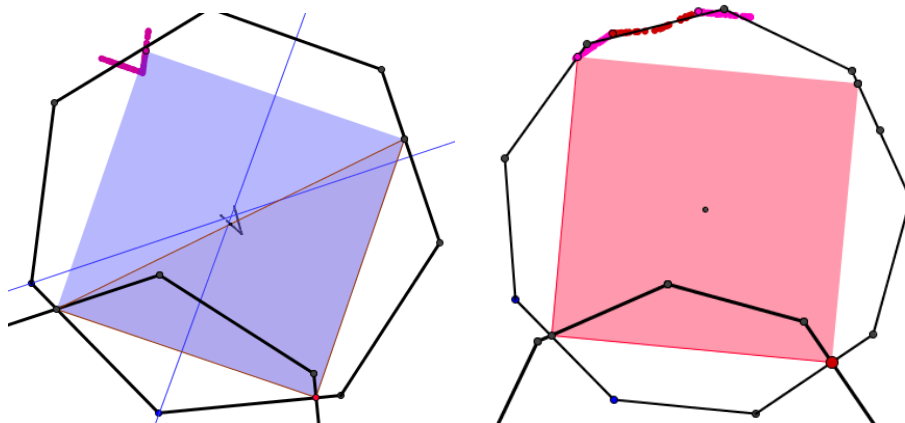
Model [\(4;6\)](#)



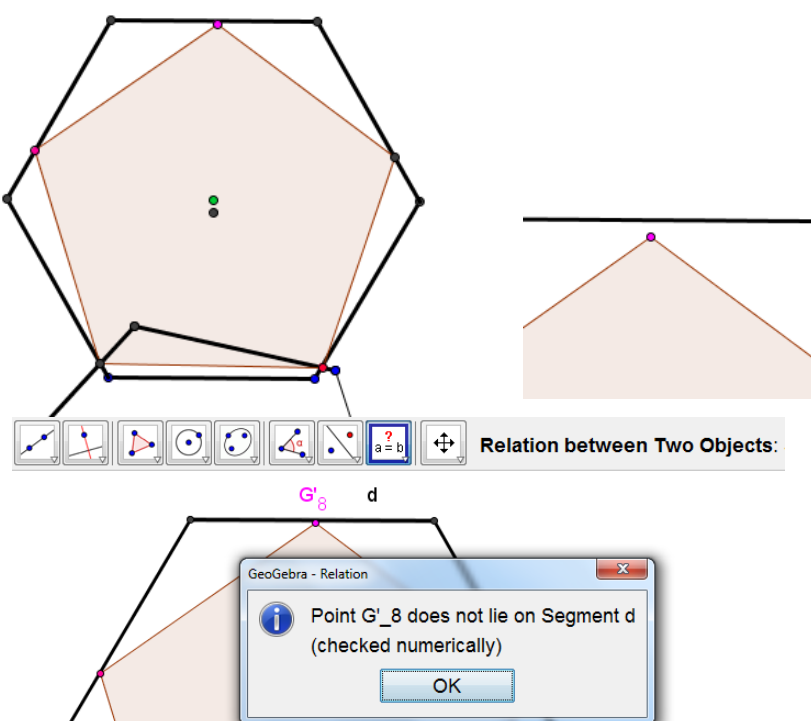
Det geometriske sted er igen et enkelt punkt (m , mk), forskellen er denne gang, at *det er dannet som et geometrisk sted for et endeligt antal indlagte kvadrater*.

Det ville på dette sted være en god ide at gætte på, hvor mange punkter det geometriske sted for konstruktionerne (4;7) og (4;9) kunne indeholde. Lad os se efter med et eksperiment:

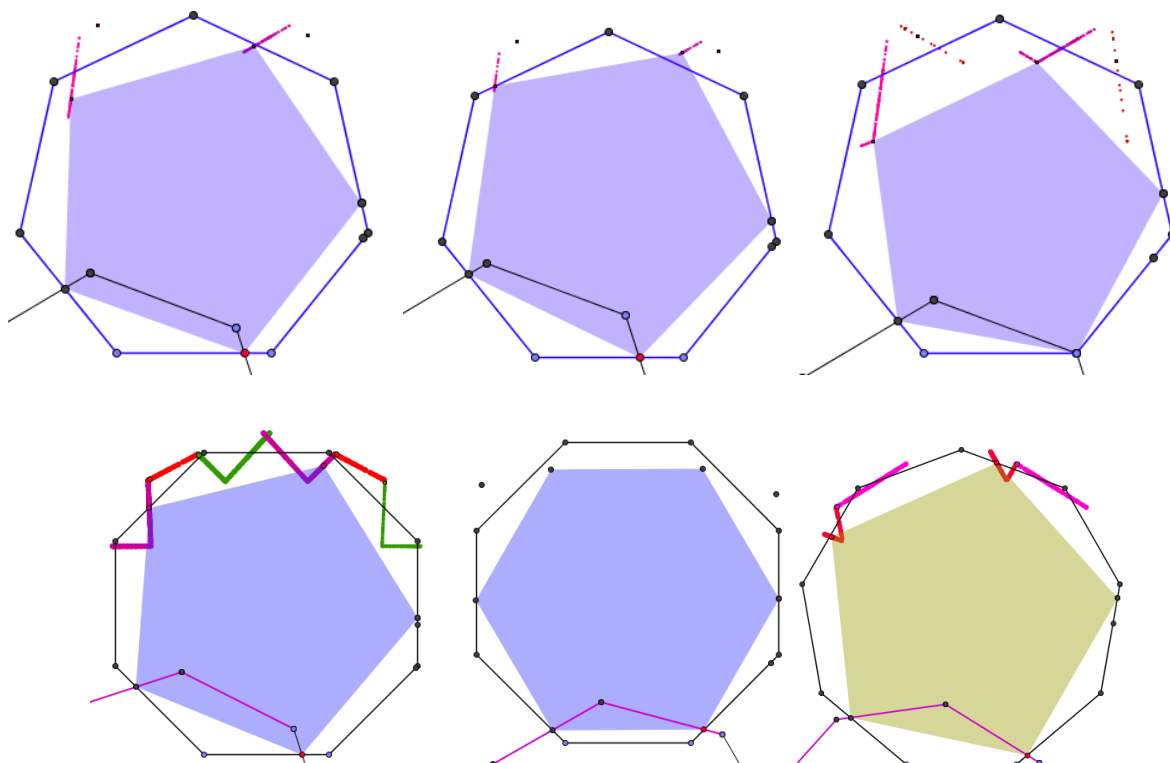
Model (4;7) og (4;9)



I model [\(5;6\)](#) ser det ved første blik under udforskningen ud til, at det femte hjørne er på hexagonen. Vi kunne kontrollere det eksperimentelt ved at zoome ind på skærmen eller ved at kontrollere sammenfaldet for to objekter. Men selvom vi måtte få et positivt svar, må vi ikke glemme, at computeren arbejder med en vis (endelig) præcision.

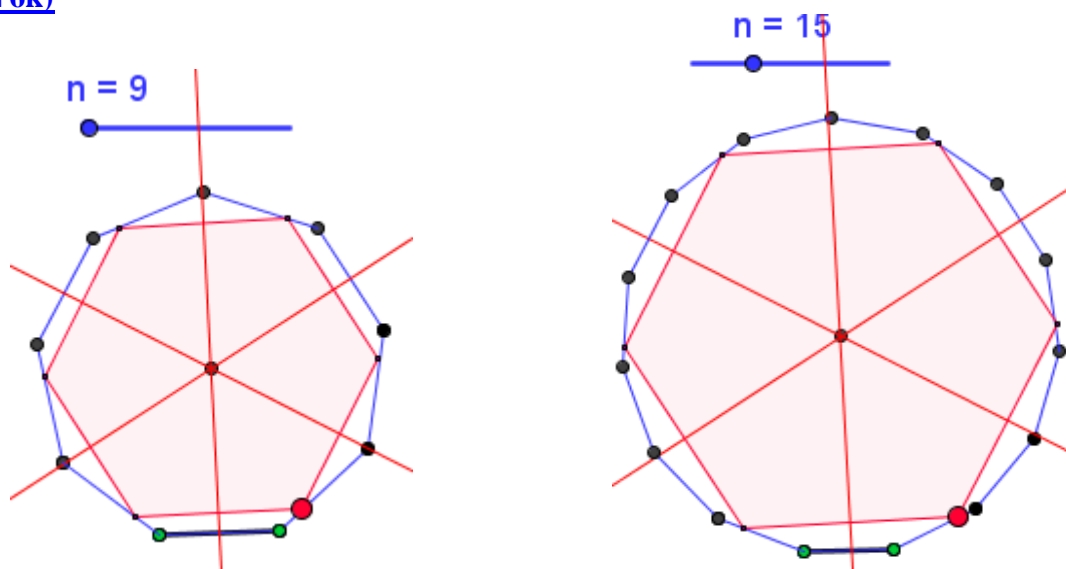


Her er nogle dynamiske modeller, der kunne bruge nogle konstruktioner, hvilket eksperimentelt leder os til den formodning, at de er umulige eller i alt fald tvivlsomme.

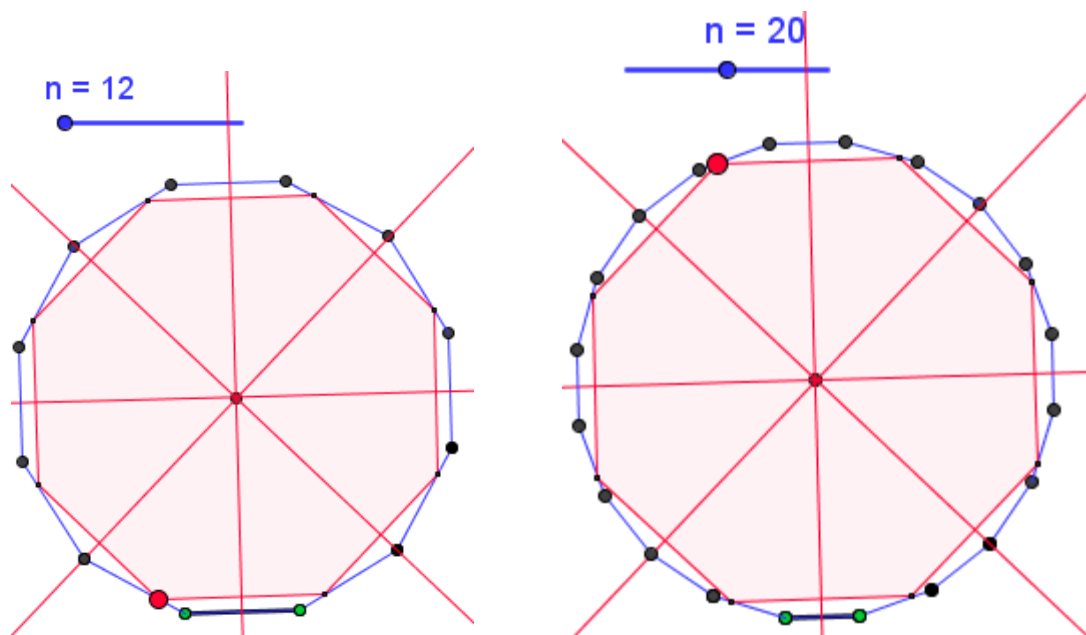


Enkelte særlige tilfælde som dem nedenfor kan dog konstrueres i lyset af denne symmetri:

(6;3+6k)



(8;4+8k)



Selv for m giver linesymmetrien ensartethed for linjestykkerne i konstruktioner af typen

$$\left(m; \frac{m}{2} + km\right)$$

Det er på dette sted en god ide at stoppe op og se sig omkring: *hvad ved vi forhold til vores udforskning?* Vi startede med den magiske sætning **en regulær m -gon, der er indlagt i en regulær n -gon**, hvor den viste sig [1]! Næsten samme titel og samme betegnelse, der viser, hvor naturligt det falder så enkelt og nøjagtigt, når vi udforsker forskellige tilfælde og beskriver formodninger og resultater. Forfatterne Dilworth og Mane fremkommer der med de nødvendige og tilstrækkelige betingelser for m og n for at indlejre en regulær m -gon i en regulær n -gon. Interessant nok ville de naivt (deres ordvalg) forvente, at *dette spørgsmål ville have været løst på Euklids tid, men det lader til endnu ikke at være helt løst.*

Her er, hvad Dilworth og Mane beviser i [1] vha. komplekse tal:

Sætning *Det antages, at $m, n \geq 3$. En regulær m -gon kan kun indlægges i en regulær n -gon, hvis og kun hvis en af følgende betingelser, som gensidigt udelukker hinanden, tilfredsstilles:*

(a) $m = 3$;

(b) $m = 4$;

(c) $m \geq 5$ og m deles med n ;

(d) $m \geq 6$ er et lige tal, og n er et ulige multiplum af $m/2$. (Bemærk, at det i dette tilfælde udelukker tilfældet $n = m/2$.)

Det viser sig, at det sidste af eksemplerne i vores udforskning tilhører (d). (Bemærk, at [1] omfatter tilfældet $m > n$.)

Hvis vi havde læst ovennævnte artikel, før vi gik i gang med den på en dynamisk måde, ville vi have været vægret os meget ved at give den til studerende (også selv om de ville være meget motiverede til

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

at udforske nye matematiske områder). Selve udforskningen indeholdt dog matematiske færdigheder, som studerende, der kender til geometriske transformationer, kan få noget ud af. Desuden gav de mønstre og relationer, der blev observeret under udforskningen, anledning til at stille nye interessante spørgsmål.

Det, der virkelig betyder noget for os i forhold til denne opgave, er dog slet ikke selve løsningen, men den proces, der ligger i at skabe en god baggrund for udforskning. Herved kan vi forbedre vores intuition og forståelse for nogle mønstre inden for konstruktioner og således udvikle en mere systematisk tilgang til udforskning. Det kan lede os til at indse, at ikke alle kombinationer af at indlægge en regulær m -gon i en regulær n -gon kan lade sig gøre, og endelig at tro på lærerens evne til at fremme indlæring af matematik ved at stille spørgsmål. Det hele i en nøddeskal med et græk Piet Hein, den store danske matematiker, arkitekt og poet:

Tæv uforknyt løs på problemerne - men vær forberedt på, at de tæver igen.

Anerkendelse

Vi vil gerne udtrykke vores store taknemmelighed over, at Prof. Oleg Mushkarov foreslog det generelle problem og hjalp med værdifulde kommentarer.

Referencer

- [1] Dilworth S. J., S. R. Mane. Inscribing a regular m -gon in a regular n -gon
http://www.math.sc.edu/~dilworth/preprints_files/DilworthManeJOGpublished.pdf (October 25, 2011)
- [2] Grooks, <http://www.archimedes-lab.org/grooks.html> (25. oktober 2011)