УВОД в Теория на Игрите

Владимир Георгиев

MINI – COURSE of 3 lecture notes

For seminar of applied Mathematics with participation of High School Teachers

Technical University, Sofia

21.6.2011-27.6.2011

This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Съдържание:

Темата хазартни игри винаги е вълнувала хората. Настоящият реферат има за цел да представи малка част от този свят на случайни събития и вероятности – свят, живеещ върху белия лист и в математическата формула, но оживяващ в блясъка на казината. С разгледаните задачи върху игри със зарове, лотарийни игри и др. се цели да се покажат някои математически идеи и въведат най-основните понятия при решаването на задачи за игри на шанса. Основна цел при съставянето и подбора на задачите беше достъпността – решенията им не изискват специфични знания и умения и биха били разбираеми за всеки.

"Gambling. Games of chance."

This paper is not an ultimate guide to the world of gambling – it only shows some fundamental problems that can easily be understood. At the same time some important terminology used in the solutions to the problems is given, providing helpful information about the world of gambling. For gambling turns out to be pure mathematics it is interesting to analyze some of its faces such as dice and lottery games. There is only one card problem because card problems are very common and the probabilities in them seem to be well-known.

Въведение в света на хазартните игри

Няма общоприето определение за хазартни игри. И все пак, ще въведем това понятие с два цитата от тематичната литература:

"Хазартните игри могат да бъдат определени като дейност, при която нещо с материална стойност - обикновено пари - се подлага на риск, включващ голяма доза късмет, в очакване да се спечели нещо с по-голяма стойност, което обикновено е повече пари."

Този цитат от книгата на Уилям Томсън "Справочник по хазартни игри" дава макар и замъглена от прекалено усложнената същност на дефиницията представа за това що са хазартните игри. И за да не останем с впечатлението, че хазартните игри са нещо толкова условно, ще представя и още един цитат:

"Хазартът не е нищо повече от залагането на сума пари на резултат от генератор на произволни числа."

Във връзка с тези цитати възниква въпросът защо залагаме на някои неща, а на други – не. Или казано по друг начин, какво прави един обект на залагане по-удачен от друг такъв? Например, подходящо ли е този обект да е фактът че Слънцето изгрява всяка сутрин? Или пък дали футболният отбор от дъното на таблицата ще победи лидерът в мача следващата седмица? Удачно ли е да се заложи на появяванет на чифт при хвърлянето на два зара? Отговорите на тези въпроси са много прости: първата възможност е твърде сигурна за да бъде подходящ обект на залог; втората определено е по-добра като вариант, защото има много по голямо значение стечението на обстоятелствата – важни фактори са времето, състоянието на терена, дали мачът се играе като домакин или гост, моментната кондиция и стимулация на играчите и т.н. Третата възможност е обвързана с конкретна вероятност, която е достатъчно голяма.

Да обобщим: само определена група от събития са подходящи за залагане.Те трябва да отговарят на две условия: (1) елемент на произволност и (2) изход, който е лесно определим.

Голямото семейство на хазартните игри разделяме на 4 категории. Те са:

Вид хазартна игра	Примери
1.Закупуване на билети от лотарии	Бинго, лото, кено, билети за благотворителни лотарии;
2.Залагане на състезания (облози)	Конни надбягвания, надбягване със двуместни каручки (популярно във Великобритания), надбягвания с хрътки;
3.Казино игри	Покер машини, блекджак, рулетка, крапс, колелото на късмета;
4.Залагане на спортни събития	Ръгби, футбол, тенис, крикет, бейзбол, голф, бокс;

Споменатите във втория цитат "генератори на произволни числа" във същност са обобщено понятие – те не изтеглят само числа. Ще разгледаме какви са те във вече споменатите категории хазартни игри:

Категория хазартни игри	Генератор
1.Закупуване на билети от лотария	Ръчно изтегляне на печелившите билети; системи, работещи със струя въздух или на принципа на перална;
2.Залагане на състезания (облози)	Класа, хендикап, реакция на старта, жокея, дължина и състояние на трасето и т.н.
3.Казино игри	Покер машини - електронен генератор, рулетка - определящи са завъртането на колелото, движението на топчето, триенето, отклонението от шайбата, крапс – хвърлянето на заровете, колелото на късмета – завъртане на колелото и т.н.
4.Залагане на спортни събития	Елементите на произволност може да варират при различните спортове, но най общо са предимството на домакина, времето, състоянието на играчите и терена и т.н.

Коментар за приспадането на залаганията на спортните игри към семейството на хазарта най-точно е дал Джон Скарнес в книгата си "Универсално ръководство за хазарта" :

"*Спортните събития като конни надбягвания, бейзболни, футболни, баскетболни и боксови мачове обикновено се възприемат като сблъсъци на умения и обиграност. Но трябва да ги причислим към групата на игрите на късмета, защото от гледната точка на хазарта , те всички съдържат определено количество шанс. Също така методите на днешните букмейкъри за определянето на хендикап са такива, че факторът умение играе незначителна роля при определянето на потенциалния победител.*"

ХАЗАРТНИ ИГРИ

Теорията на вероятностите е отделна математическа наука, изучаваща закомерността на случайните събития. Тя възниква във връзка с хазартните игри.

Добре известен факт е, че честотата на резултатите се доближава до константа при достатъчно голям брой опити. Например, много учени са хвърляли монета и следили честотата на появяване на 'ези'. Всеки път, когато опитите са били достатъчно много, тя е приблизително 0,5. За да онагледим казаното до тук, нека разгледаме следната таблица:

Експериментатор	Брой опити	Ези	Честота
Буфон	4040	2048	0,5080
Пързън	12000	6014	0,5016
Пързън	24000	12012	0,5006

Гореописаната зависимост води до извода, че честотата на случването на някакво явление в дълъг период от време е приблизително равна на константна величина. Например, честотата на раждане на момче е 0,518, а на момиче – 0,482.

Тази константна величина наричаме **<u>вероятност</u>**.

Едно от основните понятия в теорията на вероятността е **<u>математическото очакване</u>**. То е основна характеристика на разпределението на вероятностите на случайна величина.

Нека допуснем, че игра има n различни изхода, вероятността за за всеки от които е p_i Тогава математическото очакване за величината x, която приема стойности x_i може да бъде изчислена с формулата:

$E(x)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n$

В случая, когато $p_1=p_2=\ldots=p_n=\frac{1}{n}$ формулата приема вида

$$E(x)=\frac{x_1}{n}+\frac{x_2}{n}+\ldots+\frac{x_n}{n}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

Оказва се, че с помощта на математическото очакване може да се предвидят оценки на величини по няколко случайни признака при достатъчно дълъг период от време.

Да се върнем на вероятността:

<u>Най-общо, вероятността е равна на отношението на благоприятните за събитието случаи към броя на възможните случаи.</u> Нека разгледаме следната

Задача 1. - Тест Ученик се явява на математически тест. На въпрос, носещ 5т. за верен отговор и отнемащ от общия му актив 2т. за грешен, той се затруднява. Ако въпросът има 4 възможни отговора, струва ли си ученикът да налучква?

- ***Решение:*** От казаното до момента, ако вероятността ученикът да налучка верния отговор е P, то:

P=благоприятните за събитието случаи/общия брой случаи=$\frac{1}{4}$. От условието задачата носи 5т., следователно математическото очакване е E=$\frac{1}{4}*5=1{,}25$.

Това са точките, които задачата потенциално носи при налучкване. От друга страна, вероятността ученикът да сбърка е $P_1=\frac{3}{4}$. Следователно математическото очакване е $\frac{3}{4}*$(-2т)=-1,5т. Това са точките, които потенциално се отнемат от актива на ученика при налучкване. Сега сравняваме модулите на получените резултати и тъй като 1,25<1,5, то не си струва ученикът да налучква.

Нека разгледаме и следния прост пример. Разиграва се лотария с тираж 1000 билета, с цена 1$. Наградите са следните: 1x500$, 5x50$ и 20x10$.

брой	вероятност	печалба, $
1	1/1000	500
5	5/1000	50
20	20/1000	10
974	974/1000	0

Следователно, общият награден фонд е $1*500\$+5*50\$+20*10\$=950\$$, или средно по $\$\frac{950}{1000}$=$0,95 на всеки билет. Този показател се нарича **<u>очаквана резултат (печалба)</u>**. Сега изваждаме цената на билета от очакваната печалба: $0,95-$1,00= -$0,05 – **<u>среден резултат</u>**. Отбелязваме, че разглежданата лотария не е изгодна – на билет се губи средно $0,05.

От всичко казано до момента може да изведем следната формула, изразяваща зависимостта на очакваната печалба от средния резултат в проценти:

среден резултат=очаквана печалба-100% , тъй като очакваният резултат в случая представяме като $100\%*\frac{0{,}95\$}{1\$}=95\%$, а средния резултат е $100\%*\frac{-0{,}05\$}{1\$}=-5\%$. Проверяваме: 95% - 100% = - 5%.

Знаейки средния резултат от дадена игра, можем достатъчно сигурно да прогнозираме печалбите за голяма продължителност от време. Така например при игра на рулетка доходността е –2,7%. Следователно, ако заложим по 1$ 1000 пъти, балансът от играта ще е приблизително –27$. Така можем да конструираме лотария при предварително известен тираж и награден фонд така, че тя да е печеливша за организаторите.

Нека се спрем и на още няколко задача върху лотарийни игри.

Задача 2. - Лотария Да се определи минималния тираж на лотария с цена на билета 1$ при следния награден фонд така, че тя да е печеливша за организаторите:

1x1000$	2x50$	10x10$	100x1$

Нека тираж е X билета ($X \in N$). Тогава средният резултат A е:

A=очакваната печалба – цена на билета= $\dfrac{1000\$ + 2 * 50\$ + 10 * 10\$ + 100\$}{X} - 1 = \dfrac{1300\$}{X} - 1$

Организаторите трябва да са на печалба, тоест:

$\dfrac{1300\$}{X} - 1\$ < 0 \Rightarrow \dfrac{1300\$}{X} < 1\$ \Rightarrow X > 1300$. Търсим min X $\Rightarrow$ X=1301 билета.

Задача 3. - Лотария Една лотария е с тираж n билета, от които m са печеливши. Играч закупува k билета. Намерете вероятността един от неговите билети да се окаже печеливш.

Решение: Ако с P означим вероятността изобщо един билет от лотарията да е печеливш, то:

P =благоприятните за събитието случаи/общия брой случаи $= \dfrac{m}{n}$.

Следователно математическото очакване един от билетите на играча, които са k на брой да е печеливш е $E = \dfrac{m}{n} * k = \dfrac{k * m}{n}$.

Задача 4. – Слот машина На слот машина (на рисунката долу) се играе с жетони на стойност 5$. Машината се състои от 3 барабана, на всеки от които са нанесени числата от 0 до 9 . При завъртане тя генерира произволно число и ако то се дели на 100 вложената сума се възвръща и казиното плаща на играча вложената сума умножена по 100. Изгодна ли е играта?

Решение: Само в случаите, когато последните две позиции са 0, генерираното число се дели на 100. Това са 10 благоприятни случая.

Стотици	Десетици	Единици
10 възм. (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)	1 възможност (0)	1 възможност (0)

Следователно вероятноста за печалба е $P = \dfrac{10}{1000} = \dfrac{1}{100}$. Да разгледаме ситуацията при достатъчно голям брой опити – например 10000. От тях според всичко казано до момента печелившите са приблизително 100, а непечелившите – 9900. Така балансът за казиното е:

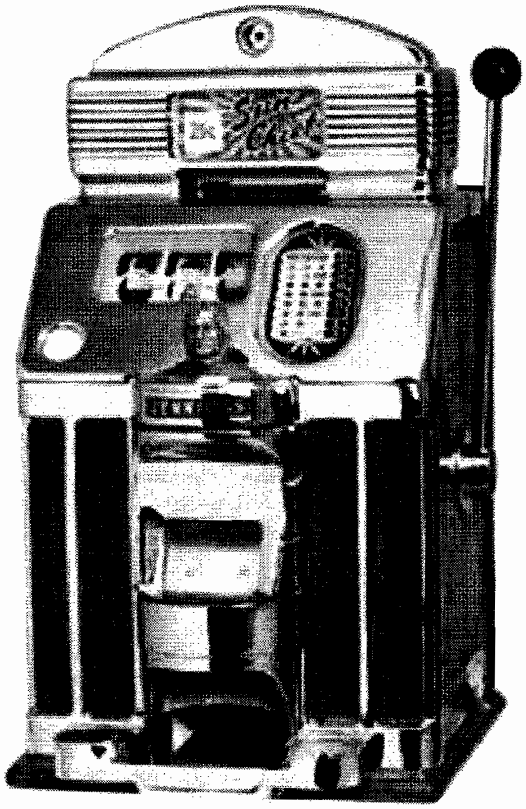
$9900*5-\ 100^2\ *5$ =49500 – 50000= -500$

Изобщо, за X опита, балансът на казиното е:

$$(X-\frac{X}{100})*5-\frac{X}{100}*500=\frac{99}{100}*X*5-*X*5=4{,}95*X-5*X=-0{,}05*X<0\Rightarrow$$

играта е изгодна за залагащия.

•



Слот машините, известни още като "еднорък пират" или ротативки, представляват устройства, които след завъртането на ръчка генерират комбинация от символи. Игралната зала определя кои комбинации са печеливши. Слот машините са един от най-популярните обекти в казината. Съществуват множество анекдоти във връзка с тях, като един гласи: жена отишла да играе в казино и след като изгубила всичките си пари на слот машина, отишла при мениджъра и го попитала: "Дадох 250$ за игра в тези машини, а получих 25¢. Печели ли се изобщо от тях?". Мениджърът и отговорил: "О, да Госпожо, със сигурно се печели. Годишно ни плащат данъка от 250 млн $, и пак са на печалба от по 100000$ всяка."

Нека се спрем и на една задача, която за разлика от примерите до момента наистина се практикува в казината по света:

<u>Задача 5. – Колодата с карти</u> Играчът разбърква картите от едно тесте, номерирани от 1 до 20 вкл., и ги нарежда една по една с лицето нагоре. Всеки път, когато излезе карта, чийто номер е по-голям от излезлите преди това, той получава 10$ от казиното (като първата автоматично му носи 10$ независимо коя е). Той плаща на казиното 50$ за играта. Каква е сигурността на казиното, че няма да банкрутира?

<u>Решение:</u> Вероятността по-голямата от първите две да печели е Р=$\frac{1}{2}$ (картата задължително трябва да е излязла втора). Вероятността най-голямата карта от първите три да е печеливша е Р=$\frac{1}{3}$ (тя трябва да е излязла трета). За да е печеливша най-голямата от първите четири карти вероятността е $P=\frac{1}{4}$ (картата трябва задължително да е излязла четвърта). Аналогично вероятността да спечели най-голямата от първите n изтеглени карти е: P=благоприятните за събитието случаи/общия брой случаи=$\frac{1}{n}$.

№карта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P=	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10

№карта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P=	1/11	1/12	1/13	1/14	1/15	1/16	1/17	1/18	1/19	1/20

Очакваната печалба при 20 карти е $S=10\$ * X$, където $X=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}$

$S\approx 35{,}98\$ < 50\$$ или казиното е на печалба.

Задача 6. – "Крапс" Настоящата задача представя един вариант на популярната американска игра. Играчът хвърля два зара и пресмята сумата от техните показания. Ако тя е равна на 7 или 11, играчът печели; ако тя е 2, 3 или 12, играчът губи. Всеки друг резултат ще наричаме "пойнт". Ако резултът при първото хвърляне е пойнт, играчът продължава да хвърля заровете, докато не повтори този пойнт, с което печели, или докато заровете не покажат сумарен резултат 7, при което играчът губи. Каква е вероятността играчът да спечели?

Решение: Нека пресметнем отначало вероятностите на различните изходи при еднократно хвърляне на двата зара, които приемаме че са различни, например червен и зелен. Всички изходи (6*6=36 на брой) са равновъзможни и са дадени в следната таблица:

Поклазания на зеления зар

Показания на червения зар

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

В клетките са посочени сумарните резултати на заровете. Сега лесно можем да намерим техните вероятности.

Сума от точките	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятност на сумата	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Нека P е вероятността при първото хвърляне резултатът да е фиксиран пойнт, а R – вероятността играта да продължи. Очевидно R=1-P-$\frac{1}{6}$, където $\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$ е вероятността сумата от точките да е 7. Играчът ще спечели на (r+1) –вия ход , ако играта е продължила r хода, а на (r+1) –вия ход се е появил фиксираният пойнт. Вероятността за това събитие е $R^r * P$, r=0, 1, 2, … Като сумираме r, получаваме

$P+RP+R^2P+\ldots\ldots=P*(1+R+R^2+\ldots)$, или вероятността фиксираният пойнт да донесе печалба на играча е $\frac{P}{1-R}$. Например при пойнт 4$\Rightarrow$ P=$\frac{3}{36}$,

R=1- $\frac{3}{36}-\frac{6}{36}=\frac{27}{36}$ и вероятността да се спечели с този пойнт е

$\frac{3}{36}*\frac{36}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, което се съгласува с намерения по-горе резултат.

Ще продължим с още две задачи със зарове:

Задача 7. – Залагане в Монте Карло Един човек отишъл в Монте Карло, търсейки лесен начин да направи състояние. Докато бил там му се отдала възможността да заложи на изхода от хвърлянето на зарове. Били му предложени еднакви хендикапи за всеки от следните изходи:

(1) Поне 1 шестица от 6 зара;

(2) Поне 2 шестици от 12 зара;

(3) Поне 3 шестици от 18 зара;

Човекът решил, че тъй като всички от тези условия са еднакви, ще избере една произволна възможност и ще заложи на нея. Прав ли е?

Решение: Поради сложността на задачата, ще разгледаме подобна, по опростена: Кое е по-вероятно – поне една шестица от хвърлянето на 2 зара или поне две шестици от хвърлянето на 4 зара?

При решението на така поставената задача всички дроби са закръглени до третия знак след запетаята.

Използваме факта, че сумата на вероятностите е 1:

Вероятността за поне 1 шестица от 2 зара =1 – вероятността за 0 шестици от двата зара

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$= 1 - \frac{25}{36}$$
$$= \frac{11}{36} = 0{,}306$$

Вероятността за поне 2 шестици от 4 зара =1 – вероятността за 0 шестици от 4 зара – вероятността за 1 шестица от 4 зара

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 - 4 * \frac{1}{6} * \left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$= 1 - \frac{625}{1296} - \frac{500}{1296}$$
$$= \frac{171}{1296}$$
$$= 0{,}132$$

Сега вече е ясно, че колкото повече се увеличава броят зарове, вероятността намалява.

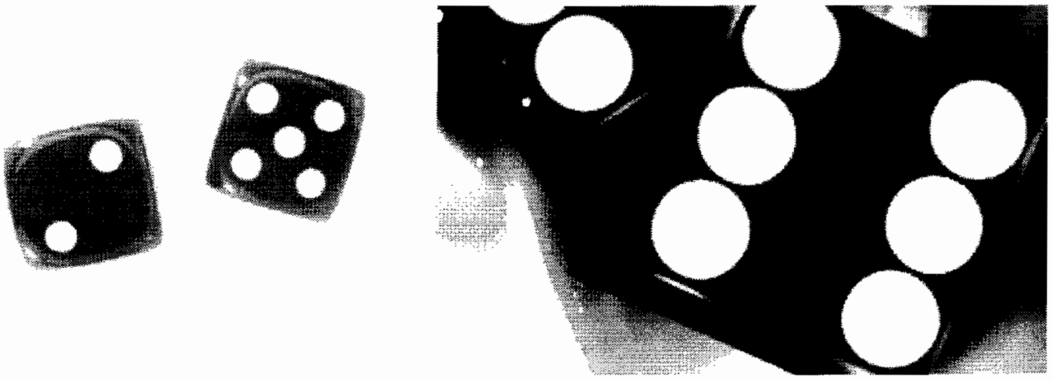
Чрез аналогични разсъждения за оригиналната задача следва:

$$P(\text{ поне 1 шестица от 6 зара }) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$$
$$=0{,}665$$

$$P(\text{ поне 2 шестици от 12 зара }) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 * \left(\frac{5}{6}\right)^{11} * \frac{1}{6}$$
$$=0{,}619$$

$$P(\text{ поне 3 шестици от 18 зара }) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - 18 * \left(\frac{5}{6}\right)^{17} * \frac{1}{6} - 153 * \left(\frac{5}{6}\right)^{16} * \left(\frac{1}{6}\right)^2$$
$$=0{,}597$$

Така че човекът, залагащ в Монте Карло, би имал най-голяма изгода от избора на първата възможност – да заложи на “поне 1 шестица от 6 зара”. Тя има най-голяма вероятност.



Задача 8. - Нестандартни зарове Четири еднакви зара са маркирани на шестте си страни по нетрадиционен начин, като освен цифри са използвани и математическите константи π, φ, e, както следва:

A: 4 4 4 4 0 0

B: π π π π π π където $\pi \approx 3{,}142$

C: e e e e e e където $e \approx 2{,}718$

D: 5 5 5 φ φ φ където $\varphi \approx 1{,}618$

Играта се състои в това, че и играчът, и представителят на казиното хвърлят еднократно по един зар и по-голямото от двете така получени числа печели. На играча се предлага да избере някой от заровете. След това и представителят на казиното прави същото. Оказва се, че представителят на казиното може да избере един от останалите три зара така, че да има по-голям шанс за печалба. И тъй като това може да се стори нечестно на играча, му се дава възможност да играе с вече избрания от представителя на казиното зар. В този случай служителят може да избере друг от останалите зарове така, че пак да има по-голям шанс за печалба.

Изследвайте вероятностите и обяснете изборът, който прави представителят на казиното във всеки един от случаите.

Решение:

За краткост играча ще наричаме X, а служителя на казиното – Y и ако резултатът на X е t, а на Y – q, то ще записваме съкратено двойката (t,q).

Ако X избере зар B, то Y избира зар A. Вероятността X да спечели е $\frac{1}{3}$ в случая $(0,\pi)$, а вероятността Y да спечели е $\frac{2}{3}$ в случая $(4,\pi)$. Следователно Y има по-голям шанс за печалба с A отколкото X с B. Отбелязваме, че $\boxed{\text{A бие B}}$.

Ако X избере C, то Y избира B. Вероятността X да спечели е $\frac{1}{3}$ в случая (π , 7), а вероятността Y да спечели е $\frac{2}{3}$ в случая (π , e). Следователно $\boxed{\text{B бие C}}$.

•

Ако X избере D, то Y избира C. Единственият случай, в който X печели е ако хвърли 5, а Y хвърли e.

$P(e , 5) = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

P (Y печели) $= P(7 , 5) + P(7 , \varphi) + P(e , \varphi) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, следователно $\boxed{\text{C бие D}}$.

Тъй като A бие B, B бие C и C бие D, то би следвало да си помислим, че A бие C и D. Обаче ако X избере A, а Y – C, Y печели с вероятност $\frac{5}{9}$ следователно Y има по-голям шанс за печалба.

$\boxed{\text{C бие A}}$.

Ако X избере A, Y може да избере D. В този случай

P(Y печели) $= P(5 , 4) + P(5 , 0) + P(\varphi , 0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Отново Y има по-голям шанс за печалба. $\boxed{\text{D бие A}}$.

Връзката между “бие” и “има по-голям шанс за печалба” е непреходна.

Колекцията от игри със зарове ще попълним с още няколко интересни казино игри.

<u>Задача 9. - ‘Зашеметителят’</u> В играта ‘Зашеметителят’ играчът започва, хвърляйки 5 стандартни зара. Ако измежду така получените 5 числа няма двойки и петици, точките се сумират и това е резултатът на играча. Ако пък има двойки и петици, то те се считат за ‘зашеметени’ и към актива на играча не се добавят точки. Във всеки от двата случая играчът продължава, хвърляйки всички ‘незашеметени’ зарове., прибавяйки точки към резултата , докато всички зарове станат ‘зашеметени’.

Например, играчът може да хвърли {1, 3, 3, 4, 6} и набере актив 17 т. Тогава хвърля отново всички зарове и получава {1, 1, 2, 3, 5}, което носи 0 т. и два зара са ‘зашеметени’. Хвърляйки останалите три зара, той може да получи {2, 3, 6}, отново няма точки към актива и ‘зашеметява’ още

10 т., увеличавайки общия резутат до 27. Хвърля се отново и показанията на заровете са {2, 3}, 0 т. към актива и още едно зашеметено зарче. Хвърля се и последното и се получава {3} и резултатът вече е 30 т. След поредното хвърляне се получава {5}, с което играта свършва с резултат 30 т.

Въпрос: Какъв е очакваният резултат от тази игра?

Решение : Играчът започва с 5 зара и ги хвърля докато всички са 'зашеметени'. Съществен момент при решението е фактът, че броят зарове, които се хвърлят, се променя. Когато n зара са хвърлени, определена част от тях могат да бъдат 'зашеметени' (тоест да се е появила поне една 2 или 5), оставяйки j 'незашеметени' зара. Вероятността за това да е:

$$P_{n,j} = \frac{n!}{j!*(n-j)!} * \frac{2^{n-j} * 4^{j}}{6^{n}}$$

Където: възможните комбинации от n зара j да са 'зашеметени' са

$$\frac{n!}{j!*(n-j)!}$$

$2^{n-j}*4^{j}$ са възможните разпределения на двата символа 2 и 5 от общо (n-j)

хвърлени зара и на останалите 4 символа (1, 3, 4, 6) от j хвърлени зара. 6^{n} са всички възможни изхода от n-те хвърляния.

За конкретната задача n=5 и j={0, 1, 2, 3, 4, 5}

При n=5, j=0 $\Rightarrow$ $P_{n,j}=\frac{1}{243}$

При n=5, j=1 $\Rightarrow$ $P_{n,j}=\frac{10}{243}$

При n=5, j=2 $\Rightarrow$ $P_{n,j}=\frac{40}{243}$

При n=5, j=3 $\Rightarrow$ $P_{n,j}=\frac{80}{243}$

При n=5, j=4 $\Rightarrow$ $P_{n,j}=\frac{80}{243}$

При n=5, j=5 $\Rightarrow$ $P_{n,j}=\frac{32}{243}$

Нека очакваният резултат от 5 хзърляния е E(5).

Когато се хвърлят n зара, очакваната сума е $3{,}5 * n$ – това се постига ако нито един от заровете не показва 2 или 5. Нека E(n) е очакваният резултат когато започваме с n зара. При E(1) имаме:

$E(1)=3{,}5 * P_{1,1} + E(1) * P_{1,1}$

Това е така, защото при едно хвърляне средно прибавяме 3,5 т. към актива си ако не изтеглим нито едно 'зашеметено' число или това са $3{,}5 * P_{1,1}$ т. Сега сме в същата позиция от която започнахме, т.е. прибавяме към актива си $E(1) * P_{1,1}$ т.

Така получаваме уравнение за E(1), чието решение дава резултат $E(1)=3 * \frac{2}{3} * \frac{7}{2} = 7$.

Сега да предположим че играем с 2 зара. Очакваният резултат е:

$E(2) = (2 * 3{,}5 + E(2) * P_{2,2}) * P_{2,2} + E(1) * P_{2,1}$

Това е така, защото с едно хвърляне вземаме $2 * 3{,}5$ т. средно ако нито едно зарче не е 'зашеметено', в който случай се връщаме отново откъдето започнахме – очакваме да прибавим E(2) т. към актива си, или пък точно едно зарче е 'зашеметено', и очакваме да вземем E(1) т. от оставащото. Продължавайки по същия начин, извеждаме обобщаващото уравнение:

$$E(n) = 3{,}5 * n * P_{n,n} + \sum_{j=1}^{n} E(j) * P_{n,j}$$

За n=5 $\quad E(n)=\frac{837242}{52117} \approx 16{,}06466$

Задача 10. Играем следната игра със зар. Използваме две хвърляния на зара за да съставим 2-цифрено число. След първото хвърляне играчът избира дали полученото число да участва като цифрата на единиците или на десетиците при образуването на 2-цифреното число. След второто хвърляне непопълнената позиция се запълва от изтегленото число. Играчът играе срещу машина, която по произволен начин подрежда своите изтеглени числа (машината генерира отделни изходи от хвърлянето на зар за себе си и играча).

Каква стратегия трябва да следва играчът за да постигне максимален среден резултат? След n игри, кой би имал повече победи – той или машината?

Решение: Стратегията в играта трябва да определи в кои ситуации първото изтеглено число да бъде поставено на позицията на десетиците, и в кои – на единиците. Разбира се, две от възможностите за изход от първото хвърляне са ясни – случаите, когато се изтегли 6 или 1. При изтеглена шестица тя се поставя на позицията на десетиците, защото това е най-голямото число на зара. Обратно, ако се изтегли единица, поради факта, че по-малко число от нея няма, тя ще се постави на позицията на единиците. Остава да разгледаме възможностите за изтеглена 2, 3, 4 или 5 от първото хвърляне. Ако първото изтеглено число е x и го използваме като цифра на единиците, то очакваният резултат от играта би бил

$$\frac{2+3+4+5}{4}*10+x=35+x.$$

Ако пък се постави като цифра на десетиците, то очакваният резултат за играча е

$$10*x+\frac{2+3+4+5}{4}=10*x+\frac{7}{2}.$$

Сарвняваме двата резултата и стигаме до извода, че $35+x<10*x+\frac{7}{2}$ за $x>3,5$, т.е. $x\geq 4$.

Така че когато първото изтеглено число е 4, 5 или 6, то се поставя за цифра на десетиците, а ако е 1, 2, 3, то е цифра на единиците.

Средният резултат на играча е:

$$\frac{63,5+53,5+43,5+38+37+36}{6}=45,25.$$

Остава да изчислим и средния резултат на машината:

$$\frac{6*(6+5+4+3+2+1)*10+6*(1+2+3+4+5+6)}{36}=\frac{1260+126}{36}=\frac{1386}{36}=38,5.$$

$45,25>38,5$, което дава отговор и на въпроса кой би имал повече победи след n игри – това е играчът, използващ гореописаната стратегия.

С разгледаните до момента задачи се спряхме на разнообразни хазартни игри. Неоспорим факт е, че в наши дни залагането на спортни събития измества класическите казино игри по популярност. Затова коментарът върху него е неизбежен.

Изкуството да правиш залози се състои в балансирането им така, че да има доходност без значение какъв е изхода. Букмейкърите печелят пари, предлагайки хендикапи, различни от истинските вероятности за скритото явление (например изходът на даден мач). Нека разгледаме и следния пример:

Букмейкър избира да приема залози на спортно събитие, което има само два възможни изхода – годишната регата между отборите на университетите Оксфорд и Кеймбридж. Той приема залози 2-1 за победа на Кеймбридж и 4-6 за победа на Оксфорд. Чрез прости изчисления получаваме, че според така поставените условия на залагане, вероятността Кеймбридж да спечели е 66,(6)%, а за Оксфорд тя е 40%. Сумата на двете вероятности е 106,(6)%. Излишъкът от 6,(6)% е известен като оувър раунд. Казано накаратко, букмейкърът е продал залози възлизащи на 106,(6), при условие че изходът може да бъде само 100. Има 100% вероятност, че една от лодките ще финишира първа. Ако букмейкърът приеме залози пропорционални на хендикапите, например £66,67 за Кеймбридж и £40 за Оксфорд, ще плати £100 независимо от изхода, с 6,25% доходност за него.

•На практика, разбира се, букмейкърът би се нуждал да 'нагласят' неговите хендикапи в зависимост от съотношението между търсенето и предлаганото. При повече заложени пари за Оксфорд отколкото изчислената вероятност предполага той би увеличил хендикапа за победа на Оксфорд и намалил този за Кеймбридж. Същият принцип важи на стоковата борса, когато брокерите купуват и продават акции при различни цени купува – предлага.

Състезанията като цяло са популярно развлечение от стотици години. В древния Рим, надпреварите с колесници били забавата на деня. В днешната култура имаме всичкс от състезания с камили до надбягвания с хрътки. Състезанията могат да бъдат намерени на почти всеки континент в най-разнообразни форми. Изглежда, че откакто съществуват тези различни надпревари, го има и залагането на представянето на участниците.

Конните надбягвания са особено популярни в САЩ и Австралия. Правилата са много прости: избираш си кон и правиш залог, който се възвръща в зависимост от това на кое място е завършил той. Участникът има три избора: да заложи дали конят ще пристигне на позиция 'печалба', на позиция 'място', или 'изложба'.

Позиция 'печалба' означава, че залагаш на това твоят кон да пристигне пръв. Най-големите залози и печалби са тук.

Позиция 'място' означава, че залагаш на това твоят кон да пристигне на първо или второ място. Тук вероятността за успех е по-голяма от тази при залог 'печалба'.

Позиция 'изложба' ознава, че залагаш на това твоят кон да пристигне или първи, или втори, или трети.

Хендикапът, например, може да бъде 7-1, което ще рече че за всеки заложен долар при позната позиция играчът ще получи 7$ от букмейкърът.

Това, което прави конните надбягвания толкова подходящо събитие за залагане, е фактът, че те са до голяма степен непредвидими и равностойни. Факторът знание се свежда до минимум, което ги определя като игра на шанса, която няма принципни различия със слот машините или рулетката. От гледна точка на комбинаториката, броят на комбинациите, при които избран от нас кон е на позиция 'печалба' е (n – 1)!, където n е броят на участващите коне. Броят на комбинациите, при които избран от нас кон е на позиция ‘място’, е 2∗(n - 1)!, а броят на комбинациите, при които е на позиция ‘изложба’ е 3∗(n – 1)!. За да се познае челната тройка шансът е $\frac{1}{n(n-1)(n-2)}$.

•

Заключение:
В темата са включени както задачи, съставени от автора (задача 1, задача 2, задача 3, задача 4), така и публикувани в чуждестранни математически електронни списания, като при тях са направени промени в условията и демонстрираните решения. Задача 9 и задача 10 са част от брошурата “Задачи за зарове”, неизвестен автор. За увода са използвани фрагменти от “Природата на хазарта”, написана от преподаватели в австралийски университети.

Използвана литература:

Ф. Мостелер, "Петдест занимателни вероятностни задачи с решения", изд. "Техника", 1975 г.

Брошура "Задачи за зарове"

Задачи от различни интернет страници