Interesting loci

Oleg Muskarov
+ Contributors

An old problem (of Piaciotto) attacked by various methods

Find the locus of points from which a given triangle looks isosceles.

ЛИНГВИСТИЧНО ОТКЛОНЕНИЕ В ГЕОМЛАНДИЯ

Както се вижда, езикът на *Геомландия* доста прилича на ЛОГО. Към традиционните примитиви са добавени операции, типични за обектите на евклидовата геометрия. Това са т. нар. конструктори, с които се построяват прави (LINE), отсечки (SEGMENT), лъчи (RAY), окръжности (CIRCLE) и т.н., и селектори, с които се извличат някои характеристики на геометричните обекти, като например абсциса (ABSC), ордината (ORD), дължина (LENGTH), посока (HEADING), център (CENTER), радиус (RADIUS), ъгъл (ANGLE). Типичен за *Геомландия* е примитивът OBJECT, който всъщност е MAKE, разширен с възможността да се изобразява на екрана присвоената геометрична стойност и така стойността да се актуализира автоматично при изменение на стойности, използвани в дефиницията ѝ.

В. Например?

О. Ако изменя триъгълника от нашата задача, всяко преместване на върха *C* ще доведе до автоматичното му реконструиране по такъв начин, че страните му *a* и *b*, които са дефинирани като отсечки, свързващи *C* съответно с *B* и *A*, да останат свързани с новата стойност на *C*. Много от чертите на езика на *Геомландия* ще се разкрият по-добре, когато новата дейност в контекста на задачата.

СГЪСТЯВАНЕ НА МРЕЖАТА

В. Да продължим с метода на мрежата. Ще сменим стъпката, така че да получим повече точки от някакво множество, съдържащо търсеното геометрично място.

О. Ето какво се получава, след като намалим стъпката 5 пъти (фиг. 3).

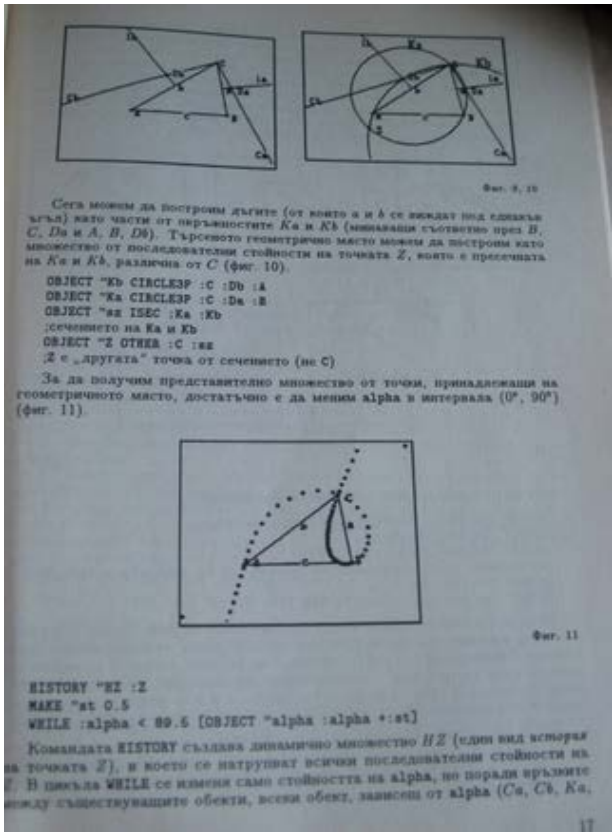
В. Подозрителните райони станаха доста по-плътни, но този метод не е особено практичен, защото времето за пресмятане расте много бързо с намаляване на стъпката. Така че може да се използва само за общи приближения. Все пак благодарение на него лесно можем да забележим, че когато придвижваме графичния курсор, знакът на разликата между двата въпроса *Is* или *смята* знакът си при преминаване на точките от отбелязаните точки.

В. Значи можем да очакваме, че тази разлика ще се запазва навсъде между всеки две точки, за които знакът ѝ е различен... Можеш ли да визуализираш този ефект по-ясно?

Фиг. 3

МЕТОДЪТ „МОРЕ-СУША"

О. Ето програмата и получената картина (фиг. 4):



Фиг. 9, 10

Сега можем да построим дъгите (от които *a* и *b* се виждат под еднакъв ъгъл) като части от окръжностите *Ka* и *Kb* (минаващи съответно през *B*, *C*, *Da* и *A*, *B*, *Db*). Търсеното геометрично място можем да построим като множество от последователни стойности на точката *Z*, които е пресечната на *Ka* и *Kb*, различна от *C* (фиг. 10).

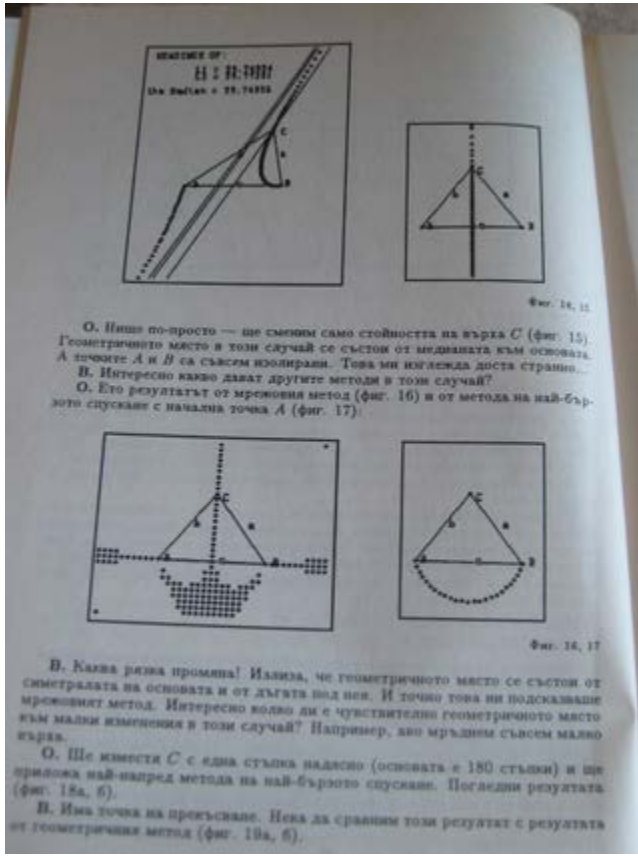
```
OBJECT "Kb CIRCLE3P :C :Db :A
OBJECT "Ka CIRCLE3P :C :Da :B
OBJECT "sz ISEC :Ka :Kb
;сечението на Ka и Kb
OBJECT "Z OTHER :C :sz
;Z е „другата" точка от сечението (не C)
```

За да получим представително множество от точки, принадлежащи на геометричното място, достатъчно е да меним **alpha** в интервала (0°, 90°) (фиг. 11).

Фиг. 11

```
HISTORY "HZ :Z
MAKE "at 0.5
WHILE :alpha < 89.5 [OBJECT "alpha :alpha +:at]
```

Командата **HISTORY** създава динамично множество *HZ* (един вид *история* на точката *Z*), в което се натрупват всички последователни стойности на *Z*. В цикъла **WHILE** се изменя само стойността на **alpha**, но поради връзките между съществуващите обекти, всеки обект, зависещ от **alpha** (*Ca*, *Cb*, *Ka*,



Фиг. 14, 15

О. Ние по-просто — ще сменим само стойността на върха *C* (фиг. 15). Геометричното място в този случай се състои от медианата към основата. *A* точките *A* и *B* са съвсем изолирани. Това ми изглежда доста странно...

В. Интересно какво дават другите методи в този случай?

О. Ето резултатът от мрежовия метод (фиг. 16) и от метода на най-бързото *спускане* с начална точка *A* (фиг. 17):

Фиг. 16, 17

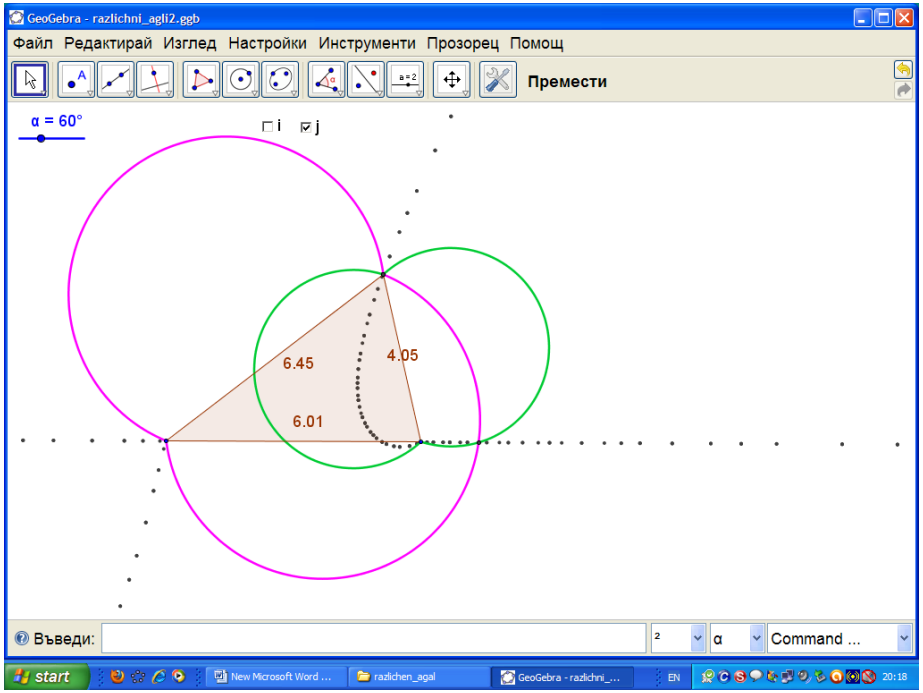
В. Каква разка промяна! Излиза, че геометричното място се състои от симетралата на основата и от дъгата под нея. И точно това ни подсказваше мрежовият метод. Интересно колко ли е чувствително геометричното място към малки изменения в този случай? Например, ако мръднем съвсем малко върха.

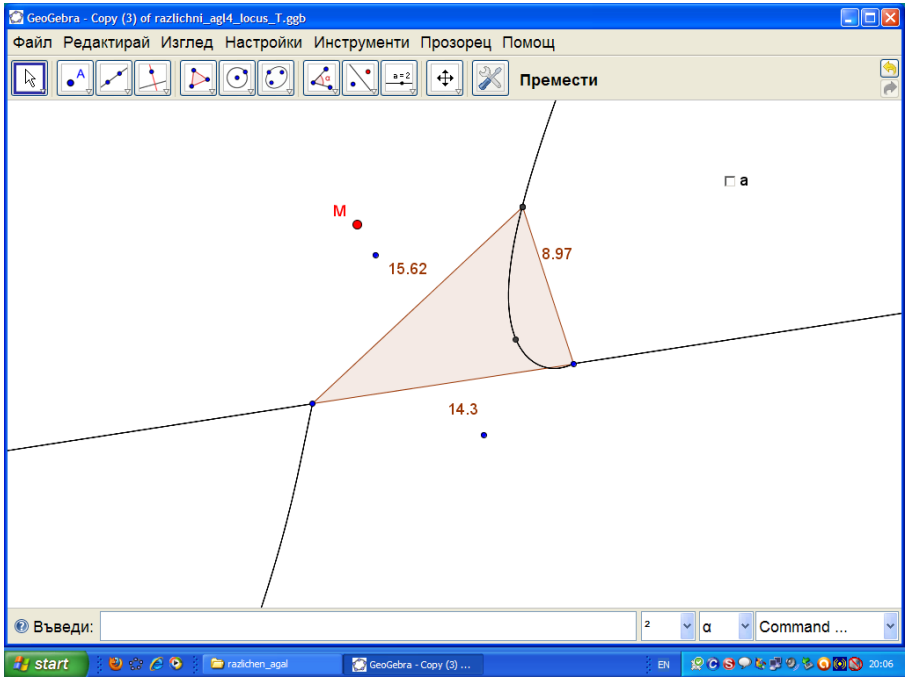
О. Ще измести *C* с една стъпка надясно (основата е 180 стъпки) и ще приложа най-напред метода на най-бързото спускане. Погледни резултата (фиг. 18*а*, *б*).

В. Има точка на прекъсване. Нека да сравним този резултат с резултата от геометричния метод (фиг. 19*а*, *б*).

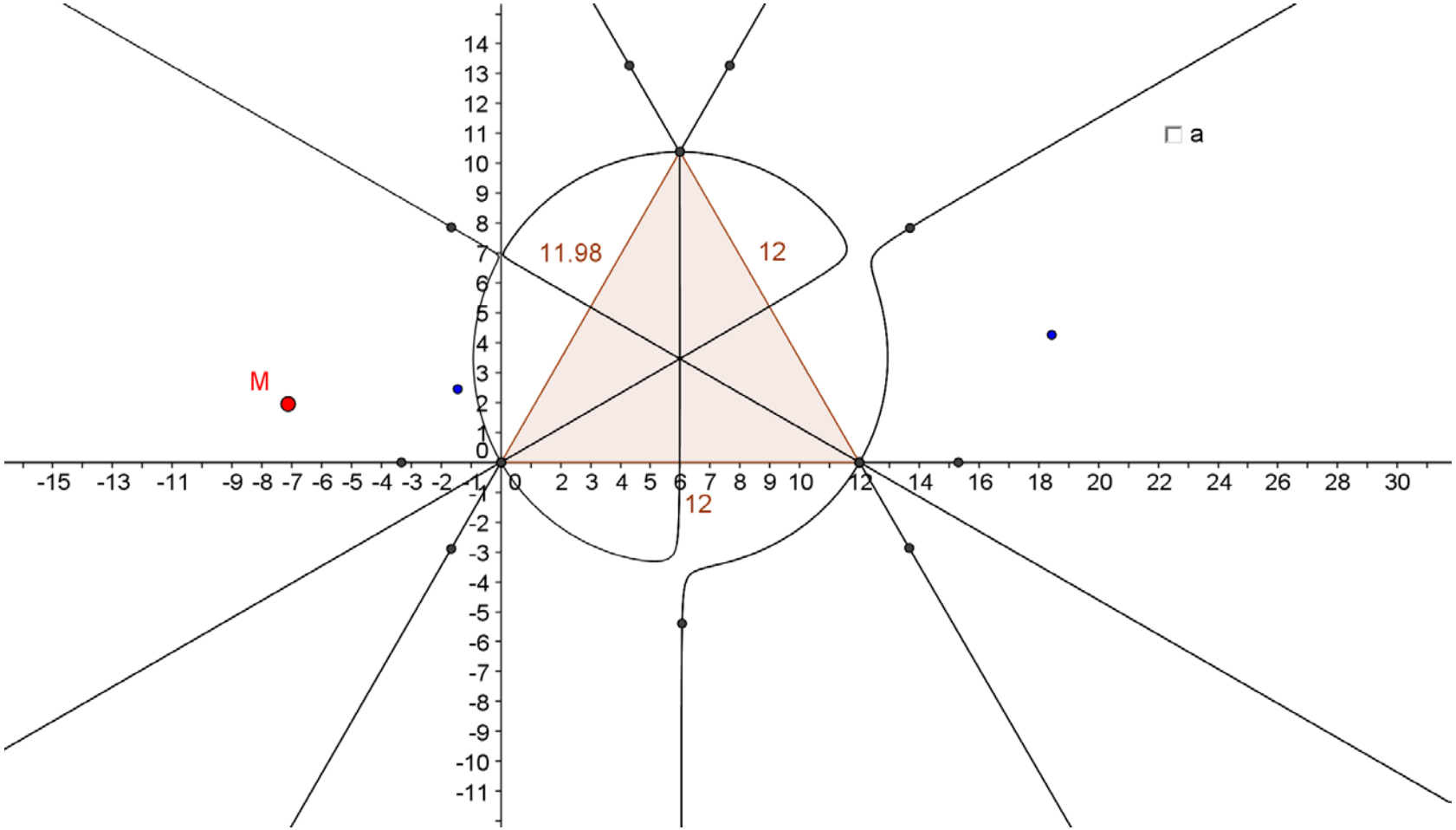
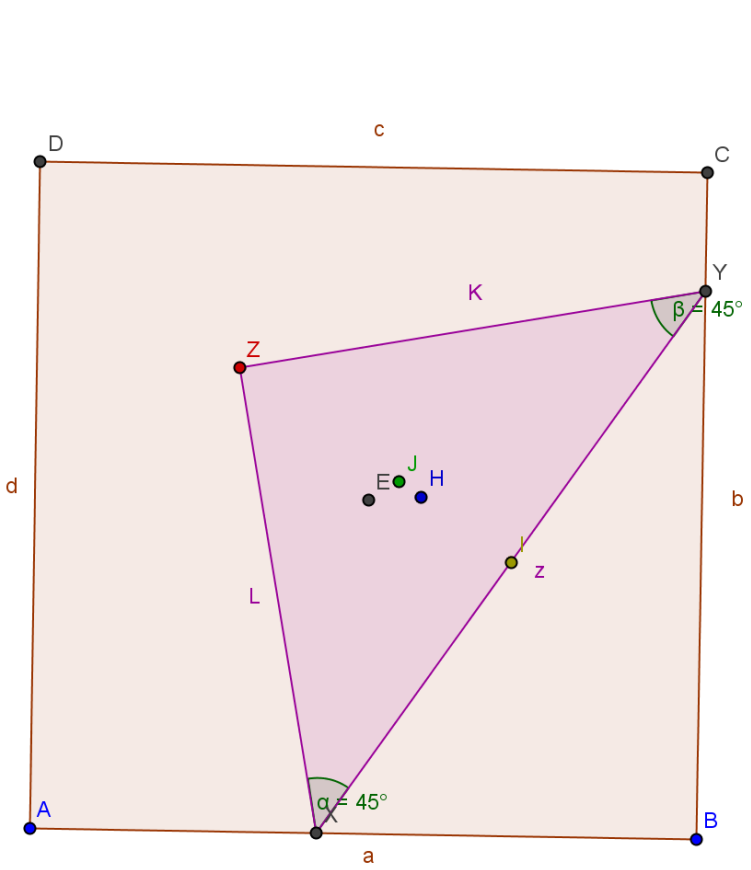
The problem of Piaciotto in GG

Find the locus of points from which a given triangle looks isosceles.





Explorations in GG



An *Olympic* problem and its generalizations by a teacher