INTERESSI DI RICERCA

MARCO ROMITO

1. APPROCCIO MARKOVIANO A PDE STOCASTICHE

La buona posizione delle equazioni di Navier–Stokes in dimensione tre è un ben noto problema aperto. Il problema rimane aperto anche nel caso si aggiunga un forzante aleatorio. Più precisamente, sebbene l'esistenza di soluzioni deboli sia stata dimostrata (in entrambi i casi), l'unicità di tali soluzioni è ancora ignota. Traendo ispirazione dalla definizione classica (*à la Hadamard*) di buona posizione per problemi di Cauchy, sembra abbastanza naturale chiedersi se sia possibile, scegliendo in maniera opportuna, trovare una buona selezione tra le soluzioni deboli che abbia migliori proprietà.

In generale, senza unicità, non sembrerebbe sensato chiedersi se ci sia continuità rispetto ai dati, ma se tale proprietà è richiesta solo per una selezione, la domanda diventa sensata. Questo costituisce una differenza non trascurabile tra i due casi con e senza rumore. Infatti l'esistenza di una selezione continua non è nota per le equazioni deterministiche, mentre è stato dimostrato in [1] (si veda anche [2]) che, risolvendo in maniera opportuna l'equazione di Kolmogorov associata al problema, è possibile costruire una soluzione delle equazioni che sia continua rispetto alla condizione iniziale e costituisca un processo di Markov (corrispondente alla proprietà di flusso per le distribuzioni).

Successivamente in *Flandoli and Romito* [3, 4] tali risultati sono stati ridimostrati in più ampia generalità utilizzando un principio astratto di selezione per restituire soluzioni che soddisfino la proprietà di Markov. Basandosi poi sul fatto che per le equazioni in esame valgono anche unicità e regolarità per tempi piccoli, si è dimostrato che vale la cosiddetta proprietà forte di Feller. Tale proprietà può essere interpretata in due modi differenti:

- si può considerare come una proprietà di regolarizzazione della evoluzione, in quanto rende continue tutte le osservabili inizialmente solo limitate e misurabili;
- si può considerare come una proprietà di continuità in quanto le statistiche a tempo fissato risultano essere continue, rispetto alla variazione totale, al variare della condizione iniziale.

Tali risultati sono poi stati estesi in diverse direzioni. In *Blömker, Flandoli, and Romito* [5] gli stessi risultati sono stati dimostrati per una equazione del quarto ordine forzata da rumore bianco spazio–temporale che descrive la crescita

di superfici, in particolare mostrando la generalità e versatilità del metodo di selezione.

In *Romito* [6] si è dimostrato che la continuità rispetto al dato iniziale sussiste fintanto che la condizione iniziale ammette una soluzione locale unica, indicando che le soluzioni Markoviane “vedono” gli stessi eventi delle soluzioni regolari.

In *Romito and Xu* [7] sono state raggiunte le stesse conclusioni ma sotto ipotesi meno restrittive sul rumore: si permette che alcune componenti del rumore (un numero finito al più) siano nulle. Si tratta di fatto dell’unico risultato noto con rumore “degenere” per il caso tridimensionale.

In conclusione osserviamo che i risultati descritti di fatto sanciscono l’esistenza di più famiglie di soluzioni (indicizzate dalla condizione iniziale) con la proprietà di Markov e continue in variazione totale. Anzi il problema *non* è ben posto se e solo se esiste più di una soluzione di tal fatta.

Sembrirebbe che tali risultati (esclusa la continuità) possano essere estesi anche ad un setting completamente deterministico e forniscano un concetto di attrattore per dinamiche multivalore (questo è un lavoro in corso in collaborazione con B. Schmalfuß, Paderborn).

2. ERGODICITÀ E CONNESSIONI CON LA TEORIA FISICA

Al di là dell’interesse matematico, le equazioni di Navier–Stokes, considerate con condizioni periodiche sul toro tridimensionale oppure in tutto lo spazio, forzate da rumore Gaussiano additivo costituiscono un modello ragionevole per analizzare la turbolenza omogenea isotropica per fluidi newtoniani incomprimibili. Nelle teorie fenomenologiche della turbolenza (un esempio tra tutti è quella in [8]) una ipotesi a-priori è l’ipotesi ergodica, ove si assume che medie spaziali e temporali del campo di velocità, all’equilibrio dinamico, si equivalgono.

La convergenza esponenziale all’equilibrio e l’unica ergodicità sono stati provati in [9] nel contesto della teoria sviluppata in [1] e quindi in *Romito* [10] per ogni soluzione Markoviana, sotto l’ipotesi che il rumore agisca su ognuna delle infinite componenti di Fourier del sistema.

Sfortunatamente la teoria Markoviana esposta dipende in maniera cruciale dalle ipotesi di non-degeneratezza del rumore. Attualmente si riesce ad ottenere ergodicità e convergenza esponenziale con rumore concentrato nello spazio delle frequenze solo riducendo il problema ad un numero finito (ma arbitrariamente grande) di componenti, come provato in *Romito* [11] (si veda anche *Romito* [12]). L’estensione al caso infinito-dimensionale (come nel caso 2D di [13]) sembra essere non banale e attuale oggetto di ricerca (collaborazione con L. Xu, Berlino).

Infine nel lavoro *Flandoli, Gubinelli, Hairer, and Romito* [14] sono state analizzate le condizioni sulle soluzioni (o meglio sugli stati stazionari soluzioni

dell'equazioni) che garantiscano la validità della teoria fenomenologica di Kolmogorov [8] *a partire* dalle equazioni.

3. DENSITÀ DI DISTRIBUZIONI DI SOLUZIONI DI PDE STOCASTICHE

La teoria Markoviana esposta nella sezione precedente porta alla luce due risultati importanti che formano la base di partenza di possibili sviluppi successivi.

- In *Flandoli and Romito* [15] è stato dimostrato che le distribuzioni a tempo fissato di due diverse soluzioni Markoviane sono equivalenti e dunque, in base ai risultati di [10], lo stesso vale per distribuzioni invarianti corrispondenti a famiglie di soluzioni differenti.
- In *Romito* [10] è stata dimostrato un risultato che può essere considerato di "unicità all'indietro": se le distribuzioni invarianti di due famiglie Markoviane coincidono, allora le due famiglie di soluzioni coincidono anch'esse. Dunque esiste un solo stato invariante (al variare delle famiglie di soluzioni) se e solo se il problema è ben posto.

L'analisi in *Romito* [16] (si veda anche [17]) mostra che ogni soluzione Markoviana risulta essere l'unica soluzione del problema di martingala ad essa associato, o in altre parole che l'operatore di Kolmogorov del problema non è unicamente chiudibile.

Le considerazioni precedenti rivelano come sia di drammatica importanza cercare di comprendere le densità reciproche di soluzioni differenti. Tali densità però non risolvono in linea di principio alcuna equazione, né in dimensione infinita esiste una misura esplicita di riferimento rispetto alla quale se ne possano studiare le caratteristiche.

Un primo ragionevole approccio sembra essere quello di analizzare proiezioni finito-dimensionali per cercare delle stime che siano indipendenti dalla dimensione. Tale analisi è in corso di sviluppo in *Debussche and Romito* [18], nel quale si è dimostrato che *ogni* soluzione debole ammette densità rispetto alla misura di Lebesgue su ogni sottospazio finito-dimensionale dello spazio degli stati. Tale risultato è valido senza restrizioni sull'intensità del rumore su ogni componente di Fourier (purché non nullo), e il prossimo passo consisterà nell'estendere questi risultati al caso di rumore degenerare, per il quale il ruolo della non-linearità diventa cruciale.

Un problema collegato a questo riguarda stime Gaussiane per tali densità ed in generale per equazioni stocastiche (collaborazione con I. Nourdin, Nancy)

4. IL PROBLEMA DELLA BUONA POSIZIONE

Un aspetto sorprendente che emerge dai risultati dettagliati in precedenza sulle soluzioni Markoviane è che tali soluzioni posseggono essenzialmente (quasi!) tutte le buone proprietà cui si è interessati per il modello (in particolare la

convergenza esponenziale all'equilibrio [9], Romito [10]).

In dimensione finita si ha una comprensione abbastanza ampia del ruolo del rumore per l'unicità di soluzioni. In dimensione infinita la situazione è meno chiara, anche solo nel caso particolare di problemi viscosi con non-linearità quadratica. Si veda [19] per una raccolta dei recenti contributi in dimensione sia finita che infinita.

Può dunque avere senso considerare problemi più semplici ove concludere il programma di dimostrazione della buona posizione che invece è ancora aperto per le equazioni di Navier–Stokes forzate da rumore. Un modello candidato è stato individuato nel modello diadico viscoso, introdotto in [20] e analizzato anche in [21, 22]. Al di là dell'effettivo interesse fisico di tali equazioni, pensate come un modello semplificato per l'interazione dell'energia di un fluido tra i modi di Fourier che ricade quindi nella classe dei cosiddetti *shell models*, la loro caratteristica principale è di possedere le principali proprietà identificabili nel problema originario, ma con un termine non-lineare che fa interagire solo i modi vicini (al contrario delle equazioni di Navier–Stokes, ove in generale tutti le componenti interagiscono tra loro).

In *Barbato, Morandin, and Romito* [23] si dimostra che il modello *deterministico* (vale a dire senza rumore) è ben posto, almeno per condizioni iniziali fisiche, nel *range* analogo al caso di Navier–Stokes tridimensionale, cioè quando le proprietà di scala relative tra la parte lineare e la parte non-lineare sono le stesse.

La buona posizione è estesa in *Romito* [24] a tutte le condizioni iniziali nel caso in cui l'equazione sia forzata da rumore. Si ottiene inoltre, come in [21] nel caso senza rumore, che quando l'intensità relativa della non-linearità è oltre una certa soglia, allora c'è esplosione con probabilità positiva.

Una congettura affascinante e molto generale che si potrebbe formulare è che il rumore, come nel caso finito-dimensionale, implichi l'unicità, almeno in termini di statistiche, delle soluzioni. In effetti gli esempi noti di non-unicità per equazioni stocastiche si applicano solo al caso di rumore moltiplicativo (si veda ad esempio [25] per un risultato recente in questa direzione). Meno ambiziosamente, si ritiene che la struttura ragionevolmente semplice del termine di interazione non-lineare possa permettere di dimostrare l'unicità delle statistiche passando attraverso l'equazione di Fokker–Planck associata alla diffusione infinito-dimensionale. Questo problema è il soggetto della attuale ricerca (collaborazione con F. Morandin, Parma e D. Barbato, Padova).

5. ANALISI DEL BLOW-UP

Il problema dell'esplosione (*blow-up*) delle soluzioni delle equazioni di Navier–Stokes è un problema essenzialmente duale al problema della buona posizione, in quanto l'assenza di esplosione implica la buona posizione (ma il viceversa non è vero!).

Il lavoro *Flandoli and Romito* [26] (si vedano anche *Romito* [27], *Flandoli and Romito* [28], *Romito* [29]) estende l'analisi di [30] al caso stocastico, mostrando che quasi certamente l'insieme delle singolarità di ogni soluzione debole di tipo martingala delle equazioni di Navier–Stokes forzate da rumore ha misura di Hausdorff 1-dimensionale zero.

Lo studio della regolarità (e della presenza di singolarità) può essere condotto anche su modelli che presentano analogie matematiche, si veda ad esempio *Blömker, Flandoli, and Romito* [5], *Blömker and Romito* [31, 32], o sul modello diadico introdotto nella sezione 4.

L'analisi Markoviana descritta in precedenza non esclude a priori la presenza di singolarità. Questo è mostrato in *Romito* [24], dove nel caso del modello diadico viscoso con non-linearità di forte intensità relativa le singolarità appaiono con probabilità positiva a partire da ogni condizione iniziale regolare.

Naturalmente il problema dell'emergenza di singolarità per le equazioni di Navier–Stokes è estremamente difficile ed è oggetto di intensa ricerca. Un problema più accessibile riguardante PDE stocastiche può essere invece formulato in termini del ruolo che il rumore gioca nella formazione delle singolarità, in altri termini se il rumore possa favorire, sfavorire o essere ininfluenza per il blow-up.

In effetti l'esempio del modello diadico [24] dimostra che l'esplosione delle soluzioni diventa generica nel momento in cui sia sufficientemente stabile (un insieme aperto di condizioni iniziali), e dunque la dinamica deterministica domina senza influenze da parte del termine aleatorio.

Allo scopo di capire quale possa essere l'influenza del rumore, può essere più opportuno analizzare problemi più semplici, utilizzando eventualmente alcune delle tecniche già sviluppate.

Nel caso delle equazioni di Navier–Stokes senza rumore recentemente sono state sviluppate due tecniche. La prima tecnica è basata sulla cosiddetta *backward uniqueness* [33–35], ed è stata utilizzata per trattare i casi di regolarità critica. Il lavoro [36] ne riporta anche una versione stocastica. Il secondo metodo è basato essenzialmente sul *blow-up* delle singolarità per equazioni ellittiche [37–40].

Un modello più semplice da analizzare e che ha già beneficiato di tecniche analoghe è costituito dalla equazione del calore non-lineare, dove si conosce con certezza l'emergenza di singolarità. Il problema è stato inizialmente studiato in [41–43], ed è poi stato accuratamente analizzato, con tecniche analoghe a quelle descritte prima, in [44–46].

Esiste una versione della equazione del calore non-lineare ove la non-linearità è contenuta nel termine di dispersione [47–50], ma inizialmente l'analisi è focalizzata sul problema additivo, in analogia con il caso Navier–Stokes. L'obiettivo finale consiste nel comprendere se ci sia influenza (che sia positiva, negativa o nulla) del rumore ed eventualmente descrivere il profilo (rispettivamente

aleatorio o deterministico) della soluzione vicino ad una singolarità.

6. RAPPRESENTAZIONI PROBABILISTICHE

Un'altra interpretazione della presenza del rumore è legata alla descrizione Lagrangiana del moto di un fluido. In tal caso il rumore agisce solo sulle traiettorie Lagrangiane e può essere interpretato come fluttuazione termica (o più in generale assommare tutte quelle caratteristiche mesoscopiche a noi ignote).

In *Busnello, Flandoli, and Romito* [51] questa descrizione permette di scrivere una formula di Feynman–Kac per la rappresentazione delle soluzioni delle equazioni di Navier–Stokes (deterministiche) nella formulazione in termini della vorticità. A causa della natura non-lineare delle equazioni e del termine di *stretching*, la rappresentazione è implicita e dipende dal campo di velocità, legato alla vorticità dalla formula di Biot–Savart. Una rappresentazione “meno implicita” è stata poi sviluppata in [52] (si veda anche [53]).

Una rappresentazione alternativa, basata su un sistema di particelle ramificanti e valida per una classe generale di equazioni semi-lineari, è stata sviluppata in *Blömker, Romito, and Tribe* [54]. Il lavoro parte dall'originale idea di [55] allo scopo di analizzare i problemi di convergenza della rappresentazione introdotta in [55] e ne fornisce una parziale soluzione, usando una rappresentazione *potata*, in cui si riduce in maniera opportuna il tipico albero di ramificazione su cui la rappresentazione è basata.

Entrambi i metodi presentati rappresentano soluzioni regolari delle corrispondenti equazioni. L'interesse attuale di ricerca riguarda la possibile (parziale) rappresentazione di soluzioni deboli. Un primo passo sarebbe costituito dalla soluzione della dinamica sottostante la rappresentazione (Lagrangiana come in [51] oppure Lagrangiana–Euleriana come in [52]) in maniera analoga a quanto fatto in [56, 57], dove si utilizza l'informazione aggiuntiva della regolarità parziale sviluppata in [30] (collaborazione con G. Iyer, Pittsburgh).

7. PROPRIETÀ GEOMETRICHE

Un argomento recente il cui sviluppo è ancora in una fase preliminare riguarda lo studio di proprietà geometriche delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali stocastiche. L'interesse principale attualmente riguarda la dimensione dell'insieme degli zeri, o in generale delle curve di livello, di tali soluzioni. Il lavoro pionieristico in questa direzione è stato [58] (si veda anche [59–61] e le referenze in essi contenute).

Nel lavoro *Baglioni and Romito* [62] si intende studiare il caso semi-lineare, che comprende essenzialmente gran parte delle equazioni classiche della fluidodinamica, attraverso una versione più sofisticata del teorema di Girsanov (si veda [63, 64]). Si osservi che le referenze precedenti considerano il solo caso ove il termine non-lineare non contenga derivate della soluzione.

Tali risultati sfortunatamente non includono il caso delle equazioni di Navier–Stokes in dimensione 2, che sembrerebbe corrispondere al caso critico in cui le statistiche a tempo fissato tra l’equazione lineare ed l’equazione non–lineare si equivalgono. Questo problema ha interesse indipendente.

L’analisi di [62] è ispirata e motivata, anche se le sue conclusioni hanno validità estremamente limitata sotto questo aspetto, da una congettura più generale la cui validità è stata dimostrata solo numericamente in [65, 66] (si veda anche [67–70]) e proposta inizialmente in [71], vale a dire che le linee di livello 0 della vorticità di un fluido in dimensione 2 acquisiscono una simmetria aggiuntiva, quale l’invarianza conforme (in senso statistico). Tale conclusione in generale è non ovvia in quanto le equazioni che governano il moto di un fluido (sia esso viscoso o ideale) *non* sono invarianti per trasformazioni conformi.

Dal punto di vista numerico sarebbe interessante comprendere la stabilità di questi risultati rispetto ai parametri del problema, in particolare nel regime di viscosità piccola. Dal punto di vista matematico sarebbe interessante ritrovare nelle soluzioni delle equazioni le statistiche di formule come in [72]. Si ritiene che una dimostrazione articolata della congettura si debba basare da una parte sul comportamento a tempi lunghi delle equazioni di Eulero [73], dall’altra sulle proprietà dei campi Gaussiani *liberi* [74].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] G. Da Prato and A. Debussche, *Ergodicity for the 3D stochastic Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures Appl. (9) **82** (2003), 877–947.
- [2] A. Debussche and C. Odasso, *Markov solutions for the 3D stochastic Navier-Stokes equations with state dependent noise*, J. Evol. Equ. **6** (2006), 305–324.
- [3] F. Flandoli and M. Romito, *Markov selections and their regularity for the three-dimensional stochastic Navier-Stokes equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **343** (2006), 47–50.
- [4] F. Flandoli and M. Romito, *Markov selections for the 3D stochastic Navier-Stokes equations*, Probab. Theory Related Fields **140** (2008), 407–458.
- [5] D. Blömker, F. Flandoli, and M. Romito, *Markovianity and ergodicity for a surface growth PDE*, Ann. Probab. **37** (2009), 275–313.
- [6] M. Romito, *Critical strong Feller regularity for Markov solutions to the Navier-Stokes equations*, 2010. To appear on J. Math. Anal. Appl., [arXiv:1003.4623](https://arxiv.org/abs/1003.4623).
- [7] M. Romito and L. Xu, *Ergodicity of the 3D stochastic Navier-Stokes equations driven by mildly degenerate noise*, Stoch. Proc. Appl. **121** (2011), 673–700.
- [8] A. N. Kolmogorov, *Local structure of turbulence in an incompressible fluid at a very high reynolds number*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30** (1941), 299–302.
- [9] C. Odasso, *Exponential mixing for the 3D stochastic Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. **270** (2007), 109–139.
- [10] M. Romito, *Analysis of equilibrium states of Markov solutions to the 3D Navier-Stokes equations driven by additive noise*, J. Stat. Phys. **131** (2008), 415–444.

- [11] M. Romito, *Ergodicity of the finite dimensional approximation of the 3D Navier-Stokes equations forced by a degenerate noise*, J. Statist. Phys. **114** (2004), 155–177.
- [12] M. Romito, *A geometric cascade for the spectral approximation of the Navier-Stokes equations*, in *Probability and partial differential equations in modern applied mathematics*, Springer, New York, vol. 140 of IMA Vol. Math. Appl. (2005) pp. 197–212, pp. 197–212.
- [13] M. Hairer and J. C. Mattingly, *Ergodicity of the 2D Navier-Stokes equations with degenerate stochastic forcing*, Ann. of Math. (2) **164** (2006), 993–1032.
- [14] F. Flandoli, M. Gubinelli, M. Hairer, and M. Romito, *Rigorous remarks about scaling laws in turbulent fluids*, Comm. Math. Phys. **278** (2008), 1–29.
- [15] F. Flandoli and M. Romito, *Regularity of transition semigroups associated to a 3D stochastic Navier-Stokes equation*, in *Stochastic differential equations: theory and applications*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, vol. 2 of Interdiscip. Math. Sci. (2007) pp. 263–280, pp. 263–280.
- [16] M. Romito, *The martingale problem for Markov solutions to the Navier-Stokes equations*, in *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI*, Birkhäuser, Basel, vol. 63 of Progr. Probab. (2011) pp. 227–244, pp. 227–244.
- [17] G. Da Prato and A. Debussche, *On the martingale problem associated to the 2D and 3D stochastic Navier-Stokes equations*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **19** (2008), 247–264.
- [18] A. Debussche and M. Romito, *Existence of densities for finite dimensional projections of solutions to the three-dimensional navier-stokes equations driven by gaussian noise*, 2011. In preparation.
- [19] F. Flandoli, *Random perturbation of PDEs and fluid dynamic model*, vol. 2015 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, Berlin, 2011. École d’Été de Probabilités de Saint-Flour XL.
- [20] S. Friedlander and N. Pavlović, *Remarks concerning modified Navier-Stokes equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **10** (2004), 269–288. Partial differential equations and applications.
- [21] A. Cheskidov, *Blow-up in finite time for the dyadic model of the Navier-Stokes equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 5101–5120.
- [22] A. Cheskidov and S. Friedlander, *The vanishing viscosity limit for a dyadic model*, Phys. D **238** (2009), 783–787.
- [23] D. Barbato, F. Morandin, and M. Romito, *Smooth solutions for the dyadic model*, 2010. [arXiv:1007.3401](https://arxiv.org/abs/1007.3401).
- [24] M. Romito, *Uniqueness and blow-up for the noisy viscous dyadic model*, 2011. In preparation.
- [25] K. Burdzy, C. Mueller, and E. A. Perkins, *Non-uniqueness for non-negative solutions of parabolic stochastic partial differential equations*, 2011. [arXiv:1008.2126](https://arxiv.org/abs/1008.2126).

- [26] F. Flandoli and M. Romito, *Partial regularity for the stochastic Navier-Stokes equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 2207–2241.
- [27] M. Romito, *Partial regularity theory for a stochastic Navier–Stokes system*, Ph.D. thesis, Università di Pisa, 2001.
- [28] F. Flandoli and M. Romito, *Statistically stationary solutions to the 3-D Navier-Stokes equation do not show singularities*, Electron. J. Probab. **6** (2001), no. 5, 15 pp. (electronic).
- [29] M. Romito, *Existence of martingale and stationary suitable weak solutions for a stochastic Navier-Stokes system*, Stochastics **82** (2010), 327–337.
- [30] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg, *Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. **35** (1982), 771–831.
- [31] D. Blömker and M. Romito, *Regularity and blow up in a surface growth model*, Dyn. Partial Differ. Equ. **6** (2009), 227–252.
- [32] D. Blömker and M. Romito, *Local existence and uniqueness in the largest critical space for a surface growth model*, 2010. [arXiv:1003.4298](#).
- [33] G. Seregin and V. Šverák, *The Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, in *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, II*, Kluwer/Plenum, New York, vol. 2 of *Int. Math. Ser. (N. Y.)* (2002) pp. 353–366, pp. 353–366.
- [34] L. Escauriaza, G. Seregin, and V. Šverák, *Backward uniqueness for parabolic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **169** (2003), 147–157.
- [35] L. Iskauriaza, G. A. Serëgin, and V. Shverak, *$L_{3,\infty}$ -solutions of Navier-Stokes equations and backward uniqueness*, Uspekhi Mat. Nauk **58** (2003), 3–44.
- [36] Z. Brzezniak and M. Neklyudov, *Backward uniqueness and the existence of the spectral limit for some parabolic SPDEs*, 2008. [arXiv:0806.0616](#).
- [37] G. Koch, N. Nadirashvili, G. A. Seregin, and V. Šverák, *Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications*, Acta Math. **203** (2009), 83–105.
- [38] G. Seregin and V. Šverák, *On type I singularities of the local axi-symmetric solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Partial Differential Equations **34** (2009), 171–201.
- [39] G. Seregin, *A note on necessary conditions for blow-up of energy solutions to the Navier-Stokes equations*, 2009. [arXiv:0909.3897](#).
- [40] G. Seregin, *Necessary conditions of potential blow up for Navier-Stokes equations*, 2011. [arXiv:1101.1869](#).
- [41] F. B. Weissler, *Single point blow-up for a semilinear initial value problem*, J. Differential Equations **55** (1984), 204–224.
- [42] A. Friedman and B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 425–447.
- [43] C. E. Mueller and F. B. Weissler, *Single point blow-up for a general semilinear heat equation*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), 881–913.
- [44] Y. Giga and R. V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat*

- equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 297–319.
- [45] Y. Giga and R. V. Kohn, *Characterizing blowup using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), 1–40.
- [46] Y. Giga and R. V. Kohn, *Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 845–884.
- [47] C. Mueller and R. Sowers, *Blowup for the heat equation with a noise term*, Probab. Theory Related Fields **97** (1993), 287–320.
- [48] C. Mueller, *Singular initial conditions for the heat equation with a noise term*, Ann. Probab. **24** (1996), 377–398.
- [49] C. Mueller, *Long-time existence for signed solutions of the heat equation with a noise term*, Probab. Theory Related Fields **110** (1998), 51–68.
- [50] C. Mueller, *The critical parameter for the heat equation with a noise term to blow up in finite time*, Ann. Probab. **28** (2000), 1735–1746.
- [51] B. Busnello, F. Flandoli, and M. Romito, *A probabilistic representation for the vorticity of a three-dimensional viscous fluid and for general systems of parabolic equations*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2) **48** (2005), 295–336.
- [52] P. Constantin and G. Iyer, *A stochastic lagrangian representation of the three-dimensional incompressible navier-stokes equations*, Commun. Pure Appl. Math. **61** (2008), 330–345.
- [53] G. Iyer, *A stochastic lagrangian proof of global existence of the navier-stokes equations for flows with small reynolds number*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire **26** (2009), 181–189.
- [54] D. Blömker, M. Romito, and R. Tribe, *A probabilistic representation for the solutions to some non-linear PDEs using pruned branching trees*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **43** (2007), 175–192.
- [55] Y. Le Jan and A. Sznitman, *Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations*, Probab. Theory Relat. Fields **109** (1997), 343–366.
- [56] J. C. Robinson and W. Sadowski, *A criterion for uniqueness of lagrangian trajectories for weak solutions of the 3d navier-stokes equations*, Commun. Math. Phys. **290** (2009), 15–22.
- [57] J. C. Robinson and W. Sadowski, *Almost-everywhere uniqueness of lagrangian trajectories for suitable weak solutions of the three-dimensional navier-stokes equations*, Nonlinearity **22** (2009), 2093–2099.
- [58] C. Mueller and R. Tribe, *Hitting properties of a random string*, Electron. J. Probab. **7** (2002), no. 10, 29 pp. (electronic).
- [59] R. C. Dalang, C. Mueller, and L. Zambotti, *Hitting properties of parabolic s.p.d.e.'s with reflection*, Ann. Probab. **34** (2006), 1423–1450.
- [60] R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, and E. Nualart, *Hitting probabilities for systems of non-linear stochastic heat equations with additive noise*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **3** (2007), 231–271.
- [61] R. C. Dalang, D. Khoshnevisan, and E. Nualart, *Hitting probabilities for systems for non-linear stochastic heat equations with multiplicative noise*, Probab.

- Theory Related Fields **144** (2009), 371–427.
- [62] L. Baglioni and M. Romito, 2011. In preparation.
 - [63] J. C. Mattingly and A. Watkins, 2011. In preparation.
 - [64] G. Da Prato and A. Debussche, *Absolute continuity of the invariant measures for some stochastic PDEs*, J. Statist. Phys. **115** (2004), 451–468.
 - [65] D. Bernard, G. Boffetta, A. Celani, and G. Falkovich, *Conformal invariance in two-dimensional turbulence*, Nature Physics **2** (2006), 124.
 - [66] D. Bernard, G. Boffetta, A. Celani, and G. Falkovich, *Inverse turbulent cascades and conformally invariant curves*, Physical Review Letters **98** (2007), 024501.
 - [67] G. Falkovich, *Conformal invariance in hydrodynamic turbulence*, Russian Math. Surveys **62** (2007), 497–510.
 - [68] G. Falkovich, *Nodal lines in turbulence*, Eur. Phys. J. Special Topics **145** (2007), 211–216.
 - [69] J. Cardy, G. Falkovich, and K. Gawędzki, *Non-equilibrium statistical mechanics and turbulence*, vol. 355 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008. Lectures from the London Mathematical Society (LMS) Summer School held as part of the Warwick Turbulence Symposium at the University of Warwick, Warwick, 2006, Edited by Sergey Nazarenko and Oleg V. Zaboronski.
 - [70] G. Falkovich, *Symmetries of the turbulent state*, J. Phys. A **42** (2009), 123001, 18.
 - [71] A. M. Polyakov, *The theory of turbulence in two dimensions*, Nuclear Phys. B **396** (1993), 367–385.
 - [72] D. Beliaev and F. J. Viklund, *A remark on the two-point schramm formula*, 2010. [arXiv:1012.5206](https://arxiv.org/abs/1012.5206).
 - [73] S. Alberverio and A.-B. Cruzeiro, *Global flows with invariant (Gibbs) measures for Euler and Navier–Stokes two dimensional fluids*, Commun. Math. Phys. **129** (1990), 431–444.
 - [74] S. Sheffield, *Gaussian free field for mathematicians*, Probab. Theory Related Fields **139** (2007), 521–541.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI PISA, LARGO BRUNO PONTECORVO 5,
I-56127 PISA, ITALIA

E-mail address: romito@dm.unipi.it

URL: <http://www.dm.unipi.it/pages/romito>