

La mia attività di ricerca si svolge nell'ambito del Calcolo delle Variazioni. Negli ultimi anni mi sono principalmente dedicato allo studio di problemi di tipo isoperimetrico, con particolare enfasi sulle tematiche di stabilità. In precedenza mi sono invece concentrato su problemi variazionali inerenti la Meccanica dei Continui e le sue applicazioni alla teoria dell'elasticità non-lineare, nonché a tematiche classiche del Calcolo delle Variazioni, quali la teoria di semicontinuità inferiore per gli integrali variazionali.

Uno dei principali risultati che ho ottenuto in tempi recenti riguarda il classico problema isoperimetrico Euclideo. Precisamente, indicando con $P(E)$ il perimetro di una regione $E \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) avente misura di Lebesgue $|E|$ finita, e indicata con B la palla Euclidea avente la stessa misura di E e centrata nell'origine, la disuguaglianza isoperimetrica Euclidea afferma che

$$P(E) \geq P(B), \quad (1)$$

con uguaglianza se e soltanto se $E = x + B$ per un qualche $x \in \mathbb{R}^n$. In [FMP08] insieme a Nicola Fusco (Università di Napoli Federico II) ed Aldo Pratelli (Università di Pavia) ho dimostrato l'esistenza di una costante $c(n)$, dipendente cioè soltanto dalla dimensione dello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$, tale che per ogni siffatto insieme E esista $x \in \mathbb{R}^n$ per cui risulti

$$P(E) \geq P(B) \left\{ 1 + c(n) \left(\frac{|E \Delta (x + B)|}{|E|} \right)^2 \right\}, \quad (2)$$

dove $E \Delta F$ denota la differenza simmetrica fra gli insiemi E ed F . Questo risultato, che rafforza il classico teorema isoperimetrico Euclideo, era stato congetturato da Richard Hall nel 1992. La sua dimostrazione si basa su un uso molto accurato delle più classiche disuguaglianze di simmetrizzazione. La potenza 2 non può essere rimpiazzata da nessuna potenza più piccola, possibilità che darebbe un risultato più forte nel regime critico $P(E) \approx P(B)$, e in questo senso il teorema non è migliorabile.

Il successivo dei miei principali contributi, riguarda una variante “anisotropa” del principio isoperimetrico Euclideo, nota come disuguaglianza di Wulff, che svolge un ruolo importante nello studio delle proprietà meccaniche dei cristalli. In questo ambito si considera, al posto del perimetro $P(E)$ della regione E , la sua energia di superficie

$$\mathcal{F}(E) = \int_{\partial E} f(\nu_E) d\sigma.$$

Qui σ denota l'elemento di area della superficie $(n-1)$ -dimensionale ∂E , mentre ν_E è la normale esterna (unitaria) all'insieme E . La funzione f , nota come funzione di tensione superficiale, è positiva ed è definita sulla sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$. Nel caso in cui f risulti costantemente uguale a $c > 0$, si ha un'energia di superficie isotropa

$$\mathcal{F}(E) = c \int_{\partial E} d\sigma = c P(E),$$

cioè $\mathcal{F}$ è un multiplo del perimetro. Se f non è costante, si parla invece di energie di superficie anisotrope. Una celebre costruzione dovuta al cristallografo tedesco Wulff

indica come definire, a partire da f , un convesso K limitato, contenente l'origine, tale che, considerata una regione $E \subset \mathbb{R}^n$ di misura finita, e definito $r > 0$ in modo che risulti $|rK| = |E|$, si abbia allora

$$\mathcal{F}(E) \geq \mathcal{F}(rK), \quad (3)$$

con uguaglianza se e soltanto se $E = x + rK$ per un qualche $x \in \mathbb{R}^n$. Nel caso in cui f risulti costante, allora K è la palla Euclidea, e (3) si riduce a (1). Altrimenti, siamo in presenza di un principio variazionale completamente diverso, a causa della totale assenza di simmetria da parte dell'insieme K . In particolare, l'anisotropia del problema rende inutilizzabili le tecniche sviluppate nella dimostrazione di (2). In collaborazione con Alessio Figalli (University of Texas at Austin) e Aldo Pratelli, tramite tecniche collegate alla teoria del trasporto ottimale di massa, in [FMP10] ho dimostrato l'esistenza di una costante $c(n)$ (indipendente da K !) tale che ad ogni regione E di misura finita possa associarsi $x \in \mathbb{R}^n$ per cui risulti

$$\mathcal{F}(E) \geq \mathcal{F}(B) \left\{ 1 + c(n) \left(\frac{|E\Delta(x+rK)|}{|E|} \right)^2 \right\}. \quad (4)$$

In realtà, i metodi più sofisticati di quest'ultimo lavoro permettono di calcolare esplicitamente un valore di $c(n)$, che ha andamento polinomiale nella dimensione ($c(n) \approx n^7$ nel caso anisotropo, $c(n) \approx n^3$ nel caso isotropo).

Un terzo ed ultimo risultato che posso brevemente descrivere è stato ottenuto in collaborazione con Alessio Figalli. In questo teorema vogliamo usare i precedenti risultati come punto di partenza per descrivere la struttura di gocce di liquido (caso isotropo) o di cristallo (caso anisotropo) di piccola massa. Più precisamente, limitandomi a descrivere il caso isotropo, questi oggetti si possono studiare minimizzando sulla regione E un funzionale del tipo

$$P(E) + \int_E g(x) dx, \quad (5)$$

sotto un vincolo di volume $|E| = m$. Il ruolo della funzione g è quello di prescrivere un vincolo di confinamento tramite le zone dove $g = +\infty$, e di indurre un campo di forze potenziale $-\nabla g$ su E nella zona dove $g < \infty$. Per valori piccoli della massa m , ci si aspetta che l'energia superficiale domini su quella potenziale, e che gli stati di equilibrio debbano essere vicini a (piccole) palle Euclidee. In effetti, a partire dalla disuguaglianza (2) è immediato verificare come ogni stato di equilibrio E sia vicino ad una palla Euclidea $x+B$ nella distanza $|E\Delta(x+B)|/m$ in termini della grandezza di m . In [FM11] dimostriamo che in realtà vale molto di più: ogni stato di equilibrio deve essere *uniformemente* vicino ad una palla $x+B$, le curvature principali di ∂E devono essere uniformemente vicine ad un valore costante, e in particolare, E deve essere convesso. Questi risultati, opportunamente riformulati, si estendono poi al caso anisotropo.

Volendo infine indicare ulteriori direzioni in cui sto lavorando, posso menzionare tre progetti in fase di studio più o meno avanzata:

(a) Insieme a Marco Cicalese (Università di Napoli Federico II) e a Gian Paolo Leonardi (Università di Modena) sto studiando il problema di stabilità relativo alla doppia-bolla, cioè al familiare oggetto che risolve il problema isoperimetrico “a due camere”. Riteniamo questo progetto particolarmente stimolante perchè la presenza di singolarità nel minimo

(il cerchio di attacco fra le calotte sferiche) rende difficilmente applicabili le tecniche di simmetrizzazione quantitativa o di trasporto di massa risultate utili nei risultati precedenti. Stiamo invece attaccando il problema tramite la teoria della regolarità dei quasi minimi del perimetro (una generalizzazione della classica teoria di regolarità delle superfici minime in codimensione uno dovuta ad Ennio De Giorgi), cercando di adattare a questo contesto “singolare” una recente dimostrazione alternativa di (2) dovuta appunto a Cicalese e Leonardi.

(b) Con Eric Carlen (Rutgers University) sto studiando una variante del problema (5), dove l’energia superficiale è rimpiazzata da un potenziale di interazione non-locale, e dove il potenziale g è un “potenziale a doppio pozzo”. Il modello risultante è una variante del classico modello di Modica-Mortola per le transizioni di fase, che risulta tuttavia giustificato non solo da un punto di vista prettamente fenomenologico, ma soprattutto a partire da considerazioni di Meccanica Statistica. Lo studio della forma degli stati di equilibrio ci ha condotti a studiare la stabilità nella disuguaglianza di Brunn-Minkowski

$$|E + F|^{1/n} \geq |E|^{1/n} + |F|^{1/n},$$

nel caso in cui F sia una palla Euclidea ed E sia un insieme generico (il caso in cui sia E che F risultino convessi è stato invece risolto in [FMP09]). Su quest’ultimo problema, di interesse intrinseco, abbiamo una serie di risultati quasi-ottimali, che vorremo approfondire ulteriormente.

(c) Con Alessio Figalli sto infine cercando di dimostrare la congettura di log-convessità dovuta a Frank Morgan e collaboratori. Questa congettura afferma che i minimi del problema variazionali

$$\inf \left\{ \int_{\partial E} h(|x|) d\sigma(x) : \int_E h(|x|) dx = m \right\}, \quad m > 0,$$

associati ad una densità $h(|x|)$ con $h : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ crescente e log-convessa, siano tutte e sole le palle Euclidee centrate nell’origine. Sebbene risulti quasi difficile immaginare che la risposta possa essere diversa da quella congetturata, la presenza della densità h è all’origine di alcune sottili interazioni fra perimetro e volume con densità che, in assenza dell’ipotesi di log-convessità su h , rendono l’enunciato falso. E’ dimostrato che le classiche tecniche di simmetrizzazione non si possono applicare (almeno, non nel modo ovvio), e inoltre non è affatto chiaro come sia possibile utilizzare tecniche di trasporto ottimale di massa per attaccare il problema. La congettura è stata risolta per masse m sufficientemente grandi da Kolesnikov e Zhdanov. Con Alessio Figalli stiamo invece preparando una dimostrazione della congettura nel regime di masse sufficientemente piccole.

Bibliografia:

- [FMP08] *The sharp quantitative isoperimetric inequality* (con N. Fusco and A. Pratelli), *Annals of Mathematics* (2008), no. 3, 941-980.
- [FMP09] *A refined Brunn-Minkowski inequality for convex sets* (con A. Figalli and A. Pratelli), *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26 (2009), 2511-2519.
- [FMP10] *A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities* (con A. Figalli and A. Pratelli), *Invent. Math.*, 182, (2010), 167-211.
- [FM11] *On the shape of liquid drops and crystals in the small mass regime* (con A. Figalli), in stampa su *Arch. Ration. Mech. Anal.*

[CM] *Quantitative improvements of the Brunn-Minkowski and Riesz inequalities and applications to the shape of droplets in non-local phase transitions* (con E. Carlen), in preparazione.