Descrizione dell'attività di ricerca: argomenti e risultati principali

Veronica Felli

Gli interessi di ricerca di V. Felli riguardano lo studio di equazioni alle derivate parziali nonlineari di tipo ellittico. Si è occupata dei seguenti problemi:

- equazioni ellittiche nonlineari associate a problemi di geometria differenziale (operatore di Paneitz, prescrizione della curvatura scalare e della curvatura media in varietà riemanniane con bordo, problema dell'esistenza di H-bubbles, cioè di superfici parametriche del tipo della sfera con curvatura media prescritta);
- equazioni di Schrödinger nonlineari;
- sistemi competitivi di equazioni ellittiche;
- equazioni ellittiche con potenziali singolari (esistenza di soluzioni, operatori multi-polari, comportamento asintotico delle soluzioni)

Diamo di seguito una descrizione delle lineee di ricerca sviluppate e dei principali risultati ottenuti.

Equazioni ellittiche nonlineari associate a problemi di geometria differenziale.
All'inizio della sua attività di ricerca, gli interessi di ricerca di V. Felli si sono concentrati su alcune equazioni ellittiche nonlineari associate a problemi di geometria differenziale. Nell'ambito riemanniano, ha studiato problemi inerenti la prescrizione di alcuni invarianti conformi, problemi che ammettono una formulazione analitica in termini di equazioni ellittiche nonlineari caratterizzate da un fenomeno di "perdita di compattezza" dovuta alla presenza di nonlinearità critiche rispetto alle immersioni di Sobolev. Per trattare questo tipo di problemi noncompatti, nel suo lavoro di ricerca ha seguito principalmente i due approcci seguenti.

Il primo si basa sul metodo di riduzione finito dimensionale introdotto da Ambrosetti e Badiale [5, 6] e già applicato in ambito perturbativo a problemi ellittici nonlineari di natura geometrica, come per esempio il problema di Yamabe e della curvatura scalare da diversi autori: Ambrosetti-Garcia Azorero-Peral, Ambrosetti-Li-Malchiodi, Ambrosetti-Malchiodi, etc. Ha applicato questo metodo per trattare i problemi della prescrizione di un invariante conforme del quarto ordine relativo all'operatore di Paneitz-Branson [17] e della curvatura scalare di Webster sul gruppo di Heisenberg [37].

Il secondo metodo è l'analisi di blow-up che consente di ottenere risultati di esistenza nel caso nonperturbativo [17]. Si è anche interessata all'uso di metodi di blow-up per dimostrare risultati di compattezza delle soluzioni nel problema di prescrivere la curvatura media del bordo in varietà compatte con bordo ombelicale [27, 28].

Si è inoltre occupata dello studio del problema dell'esistenza di H-bolle, cioè di superfici parametriche del tipo della sfera con curvatura media prescritta; in [18] ha studiato il caso perturbativo, cioè il caso in cui la curvatura media prescritta sia una perturbazione di una costante.

Equazioni di Schrödinger nonlineari.
Si è studiato il problema dell'esistenza di "ground state" per l'equazione di Schrödinger nonlineare, con particolare attenzione al fenomeno della concentrazione delle soluzioni quando il parametro di perturbazione (=costante di Planck) tende a zero, dato che questo fenomeno implica che le soluzioni si comportano come solitoni con un pacchetto di energia concentrato e descrive il passaggio dalla Meccanica Classica alla Meccanica Quantistica. Questo problema è stato ampiamente studiato (si

vedano per esempio [9, 10, 15]) soprattutto in presenza di un potenziale che fosse all'infinito limitato dal basso da una costante positiva. In [7, 8] si è studiata l'equazione di Schrödinger nonlineare nel caso di un potenziale infinitesimo all'infinito, dimostrando esistenza e concentrazione dei "ground states".

Sistemi competitivi di equazioni ellittiche.

Varie situazioni applicative possono essere modellate mediante un certo numero di densità (di massa, popolazione, probabilità...) distribuite in una regione dello spazio e contemporaneamente soggette a fenomeni di diffusione, reazione ed interazione competitiva. Quando quest'ultimo è quello prevalente, è ragionevole aspettarsi che le diverse densità non possano coesistere e tendano piuttosto ad avere supporti disgiunti. Da un punto di vista analitico, si tratta di studiare le proprietà qualitative delle soluzioni di sistemi di equazioni ellittiche semilineari, quando il parametro che descrive l'interazione competitiva tende ad infinito. In [12] si sono studiati sistemi di tipo Lotka-Volterra che descrivono la forte competizione fra più specie con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo. In generale, nel caso di condizioni omogenee al bordo, non si può escludere l'estinzione di una o più specie in forte competizione, come osservato da Kishimoto e Weinberger [39] per domini convessi. In [12] si è dimostrato che, con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo, la forma particolare del dominio considerato (palle disgiunte unite da tubi sottili) favorisce la coesistenza, se pur segregata, ed impedisce l'estinzione delle specie coinvolte quando la competizione cresce. Per tali domini speciali si è inoltre dimostrata in [13] la coesistenza, sotto condizioni di Neumann omogenee, di configurazioni limite di sistemi competitivi di tipo variazionale caratterizzate dall'essere minimizzanti locali dell'energia libera associata. In [14] si sono prodotti esempi di coesistenza di popolazioni in forte competizione in domini convessi (per esempio in triangoli) con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo, sfruttando una diversificazione delle dinamiche interne.

Equazioni ellittiche con potenziali singolari: esistenza di soluzioni

Mediante metodi perturbativi, in [32] è stata studiata una classe di equazioni ellittiche degeneri con potenziale di Hardy su $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, legate alla disuguaglianza di Caffarelli-Kohn-Nirenberg, che presenta un fenomeno di perdita di compattezza per l'invarianza del problema sotto l'azione di un gruppo noncompatto di dilatazioni. In questo caso, lo studio delle proprietà di nondegeneratezza del problema imperturbato, necessarie per poter applicare il metodo di riduzione finito dimensionale, ha fornito informazioni precise riguardo al fenomeno di *symmetry breaking*, cioè di esistenza di minimizzanti non radiali nel problema di minimo associato alla disuguaglianza di Caffarelli-Kohn-Nirenberg, consentendo di migliorare un precedente risultato di Catrina e Wang [11].

Risultati non perturbativi sono stati ottenuti in [33] mediante analisi di blow-up, stime a priori delle soluzioni e grado di Leray-Schauder, sfruttando i risultati di regolarità delle soluzioni ottenuti in [31].

In [1] il problema dell'esistenza e della molteplicità delle soluzioni per un'equazione ellittica con potenziale di Hardy e nonlinearità critica è stato studiato mediante metodi di concentrazione-compattezza; estensioni a equazioni quasi-lineari con il p-laplaciano sono stati ottenuti in [3]. In [29] si è poi dimostrata l'esistenza di soluzioni che si concentrano in opportuni punti critici del coefficiente della nonlinearità. In [34] si è studiato il problema dell'esistenza di soluzioni di tipo "torre", cioè il cui profilo si ottiene dalla sovrapposizione di "bubbles" con diversi fattori di riscalamento; soluzioni di questo tipo sono state costruite applicando il metodo di riduzione finito-dimensionale di Ambrosetti-Badiale [5, 6].

In [4], si è studiata l'esistenza di diversi tipi di soluzioni per una classe di sistemi di due equazioni ellittiche con potenziali di tipo Hardy e crescita critica, accoppiate con termine nonlineare critico o sottocritico. Una dettagliata analisi del comportamento delle successioni di Palais-Smale ha consentito di recuperare compattezza per alcuni valori dei parametri coinvolti e di dimostrare l'esistenza di soluzioni di *ground state* e di punti critici di tipo *passo montano* del funzionale associato sulla varietà di Nehari. Un metodo variazionale perturbativo è stato inoltre utilizzato per costruire una varietà non banale di soluzioni positive che si biforcano dalla varietà delle soluzioni del sistema disaccoppiato associato.

Equazioni ellittiche con potenziali singolari: operatori multi-polari.
L'interesse nello studio di operatori di Schrödinger con potenziali multi-polari di tipo Hardy

$$-\Delta - \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{|x-a_i|^2}$$

sorge in vari contesti fisici, quali la meccanica quantistica, l'astrofisica e la fisica molecolare. Tali operatori possono inoltre essere considerati critichi dal punto di vista matematico presentando potenziali singolari che, avendo lo stesso ordine di omogeneità del laplaciano, non appartengono alla classe di Kato. Per quanto riguarda le equazioni di Schrödinger nonlineari con potenziali multi-polari di tipo Hardy, la ricerca condotta in [35] ha evidenziato come l'esistenza di soluzioni di tipo "ground state" (ottenute tramite minimizzazione del quoziente di Rayleigh associato al problema) dipenda dalla massa e dalla collocazione delle singolarità e ha prodotto una serie di risultati che forniscono condizioni sulle masse e sui poli sia per l'esistenza sia per la non-esistenza di "groud states".

In [36] si è considerato il problema nel caso in cui i poli siano disposti secondo particolari simmetrie, ad esempio sui vertici di poligoni regolari, e il caso in cui la singolarità (anziché essere concentrata in atomi) sia distribuita lungo delle circonferenze. Quando i poli hanno una struttura simmetrica, risulta naturale chiedersi come la simmetria influenzi la loro mutua interazione. In [36] si è studiato questo aspetto dimostrando l'esistenza di soluzioni con la stessa simmetria dell'insieme delle singolarità.

In [24] sono state analizzate le proprietà spettrali dell'operatore di Schrödinger lineare associato al problema, approfondendo in particolare le questioni dell'essenziale autoaggiunzione e della positività. Le ricerche condotte hanno portato alla formulazione di una condizione necessaria e sufficiente sulle masse delle singolarità affinché esista almeno una configurazione di poli per cui la forma quadratica associata all'operatore di Schrödinger sia definita positiva. Tali risultati sono stati poi estesi in [26] al caso di potenziali singolari non isotropi, dati cioè localmente da un multiplo puramente angolare del potenziale di Hardy, basandosi sullo studio del comportamento asintotico delle soluzioni vicino alle singolarità condotto in [25].

Equazioni ellittiche con potenziali singolari: comportamento asintotico delle soluzioni.
Equazioni alle derivate parziali con potenziali singolari omogenei sorgono in vari contesti fisici, quali la meccanica quantistica, l'astrofisica e la fisica molecolare. Per esempio, in fisica molecolare non-relativistica, l'equazione di Schrödinger per la funzione d'onda di un elettrone che interagisce con una molecola polare (che si suppone puntiforme) può essere scritta come

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + e\,\frac{x\cdot \mathbf{D}}{|x|^3} - E\right)\Psi = 0,$$

dove e e m denotano rispettivamente la carica e la massa dell'elettrone e $\mathbf{D}$ è il momento di dipolo della molecola (si veda [40]). Un altro esempio di potenziale singolare omogeneo è associato in meccanica quantistica non-relativistica al campo elettromagnetico generato da un solenoide sottile: se il raggio del solenoide tende a zero mentre il flusso rimane costante, la particella è soggetta ad un campo magnetico di tipo "delta" che viene detto campo di Aharonov-Bohm. In dimensione $N = 2$, il potenziale vettore associato è del tipo

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}(x_1,x_2) = \alpha\left(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\right), \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,$$

dove $\alpha\in\mathbb{R}$ rappresenta la circuitazione di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ attorno al solenoide. Tale potenziale è omogeneo di grado -1, singolare in un punto isolato e il coefficiente della singolarità è proporzionale alla circuitazione di $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ attorno al solenoide.

È stata studiata una classe di potenziali singolari ed omogenei (inclusi i due prototipi sopra descritti) che, avendo lo stesso ordine di omogeneità dell'operatore differenziale, lo rendono invariante pre riscalamento e dunque "critico" da un punto di vista matematico. Questo è per esempio il caso dell'operatore di Schrödinger $-\Delta - \frac{\lambda}{|x|^2}$ con il potenziale inverso-quadrato $\frac{\lambda}{|x|^2}$ (cioè il potenziale di Hardy), che ha la stessa omogeneità del laplaciano.

L'analisi di fondamentali proprietà spettrali (quali l'essenziale autoaggiunzione e la positività) condotta in [24, 26] per operatori di Schrödinger con potenziali elettrici singolari multipolari ha messo in luce l'importanza del comportamento asintotico delle soluzioni vicino alla singolarità. Inoltre una precisa stima dell'andamento asintotico si è rivelata un importante strumento per stabilire l'esistenza di soluzioni di tipo "ground states" per equazioni di Schrödinger nonlineari con potenziali di Hardy multi-singolari [19, 35, 36] e di soluzioni di sistemi nonlineari di equazioni di Schrödinger con potenziali di Hardy [4].

I primi risultati sullo studio del comportamento vicino a singolarità isolate sono contenuti in [31], dove è stata dimostrata l'hölderianità delle soluzioni di equazioni ellittiche degeneri con pesi singolari consentendo di valutare l'esatto andamento asintotico vicino al polo delle soluzioni di equazioni di Schrödinger con potenziali di Hardy. Più precisamente [31] valuta l'esatto ordine di singolarità delle soluzioni positive per le quali si dimostra un andamento dato da una potenza della distanza dalla singolarità con un esponente esplicito dipendente dal coefficiente della singolarità. Un'estensione ai potenziali di tipo dipolo della forma

$$\frac{a(x/|x|)}{|x|^2}, \quad a \in L^\infty(\mathbb{S}^{N-1}),$$

(cioè multipli puramente angolari di potenziali inverso quadrato) è stata ottenuta in [25] con tecniche di separazione di variabili e principi del confronto. Difficoltà rilevanti sono sorte nel tentativo di generalizzare questa analisi asintotica per equazioni di Schrödinger con potenziali elettromagnetici omogenei e singolari, non potendo utilizzare metodi di confronto con soluzioni a valori complessi: per superare questa difficoltà, in [20] è stato proposto un nuovo approcio basato sulla formula di monotonia di Almgren.

Si sono inoltre considerati potenziali singolari del tipo N-corpi. In meccanica quantistica non-relativistica, un sistema di N particelle che interagiscono tra di loro a due a due è descritto da una hamiltoniana con un potenziale somma di potenziali a due corpi

$$H = \sum_{j=1}^{N} \frac{-\hbar^2 \Delta_j}{2m_j} + \sum_{\substack{j,m=1 \\ j<m}}^{N} V_{j,m}(x^j - x^m),$$

dove m_j è la massa della particella j-esima $x^j = (x_1^j, x_2^j, \dots, x_d^j)$, $\Delta_j = \sum_{\ell=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial (x_\ell^j)^2}$ e $V_{j,m}(y) \to 0$ per $|y| \to +\infty$, si veda [38]. Da un punto di vista matematico, di particolare interesse è il caso di potenziali inverso-quadrato $V_{j,m}(y) = \frac{\lambda_j \lambda_m}{|y|^2}$, dato che hanno lo stesso ordine di omogeneità del laplaciano rendendo il corrispondente operatore di Schrödinger invariante per riscalamento e dunque "critico". Utilizzando una formula di monotonia alla Almgren combinata con un'analisi di blow-up e separazione di variabili, nel recente preprint [21], si è studiato l'esatto andamento asintotico vicino alle singolarità delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche semilineari con potenziali cilindrici e/o multi-corpi.

L'andamento asintotico delle soluzioni di equazioni del calore con potenziali spazialmente singolari (inverso-quadrato)

$$u_t + \Delta u + \frac{a(x/|x|)}{|x|^2}\, u + f(x, t, u(x, t)) = 0$$

è stato studiato in [30], sia nel caso lineare $f(x, t, s) = h(x, t)s$ sia nel caso di una nonlinerità f con crescita sottocritica. Combinando una formula di monotonia parabolica con tecniche di blow-up, l'esatto andamento alla singolarità delle soluzioni è stato valutato, mostrando che, per $t \to 0^+$, $u(\sqrt{t}x, t)$ si comporta come un'autofunzione autosimilare singolare dell'operatore di Ornstein-Uhlenbeck con potenziale inverso-quadrato, moltiplicata per una potenza di t legata al corrispondente autovalore, che è individuato dal limite di una funzione di tipo frequenza associata al problema; come corollario di questo risultato si è inoltre dimostrato un principio di continuazione unica.

Argomenti di ricerca che verranno affrontati. Al fine di studiare le proprietà qualitative delle soluzioni del problema degli N-corpi quantistico, si estenderanno i risultati di [21] in varie direzioni, con lo scopo di descrivere il comportamento degli autostati e le proprietà spettrali dell'operatore degli N-corpi quantistico sotto le condizioni più generali possibili.

i) Si cercherà anzitutto una precisa stima asintotica del comportamento alle singolarità per potenziali perturbanti più generali (verificanti condizioni di integrabilità anziché di decadimento).

ii) Il passo successivo riguarderà lo studio dell'andamento in corrispondenza delle collisioni parziali, partendo dal problema dei 2 corpi, riconducibile ad una equazione di Schrödinger con un potenziale singolare su un iperspazio di codimensione $d < 2d$ (singolarità di tipo cilindrico). Come obiettivo a medio-lungo termine, ci proponiamo di considerare equazioni di Schrödinger con potenziali magnetici con singolarità cilindriche, allo scopo di studiare l'effetto di Aharonov-Bohm in dimensione 3: in questa situazione il potenziale vettore è localmente un gradiente che tuttavia non può essere eliminato con una trasformazione di "gauge" essendo il problema ambientato in un dominio non semplicemente connesso ($\mathbb{R}^3$ da cui è stato rimosso l'asse z o un cilindro infinito).

iii) Altro obiettivo a medio termine è lo studio di equazioni con singolarità dovute ad irregolarità del bordo del dominio: dalla letteratura sulle equazioni ellittiche in domini angolosi (si veda per esempio [41]) emerge una naturale relazione tra le singolarità dovute ad un potenziale e quelle dovute al bordo del dominio. Ci si propone di capire se il metodo di monotonia possa dare nuovi risultati (rispetto a quelli esistenti) sulle espansioni asintotiche delle soluzioni vicino a spigoli del dominio.

iv) Un ulteriore e più ambizioso programma riguarda l'analisi del comportamento asintotico vicino alla singolarità delle soluzioni di equazioni di Schrödinger evolutive con potenziali di Hardy.

Riferimenti bibliografici

[1] Boumediene Abdellaoui, Veronica Felli, Ireneo Peral. Existence and multiplicity for perturbations of an equation involving a Hardy inequality and the critical Sobolev exponent in the whole of $\mathbb{R}^N$. *Adv. Differential Equations*, 9(5-6):481–508, 2004.

[2] Boumediene Abdellaoui, Veronica Felli, Ireneo Peral. A remark on perturbed elliptic equations of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type. *Rev. Mat. Complut.*, 18(2):339–351, 2005.

[3] Boumediene Abdellaoui, Veronica Felli, Ireneo Peral. Existence and nonexistence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8)*, 9(2):445–484, 2006.

[4] Boumediene Abdellaoui, Veronica Felli, Ireneo Peral. Some remarks on systems of elliptic equations doubly critical in the whole $\mathbb{R}^N$. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 34(1):97–137, 2009.

[5] Antonio Ambrosetti, Marino Badiale. Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15:233–252, 1998.

[6] Antonio Ambrosetti, Marino Badiale. Variational perturbative methods and bifurcation of bound states from the essential spectrum. *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 128A:1131-1161, 1998.

[7] Antonio Ambrosetti, Veronica Felli, Andrea Malchiodi. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 15(2):81–86, 2004.

[8] Antonio Ambrosetti, Veronica Felli, Andrea Malchiodi. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 7(1):117–144, 2005.

[9] Antonio Ambrosetti, Andrea Malchiodi, Wei-Ming Ni. Singularly Perturbed Elliptic Equations with Symmetry: Existence of Solutions Concentrating on Spheres, Part I. *Comm. Math. Phys.*, 235:427-466, 2003.

[10] Antonio Ambrosetti, Andrea Malchiodi, Simone Secchi. Multiplicity results for some nonlinear singularly perturbed elliptic problems on R^n. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 159:253-271, 2001.

[11] Florin Catrina, Zhi-Qiang Wang. On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54(2):229–258, 2001.

[12] Monica Conti, Veronica Felli. Coexistence and segregation for strongly competing species in special domains. *Interfaces Free Bound.*, 10(2):173–195, 2008.

[13] Monica Conti, Veronica Felli. Minimal coexistence configurations for multispecies systems. *Nonlinear Anal.*, 71(7-8):3163–3175, 2009.

[14] Monica Conti and Veronica Felli. Global minimizers of coexistence for competing species. *J. London Math. Soc.*, in corso di stampa.

[15] Manuel Del Pino, Patricio L. Felmer. Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 4:121-137, 1996.

[16] Veronica Felli. Asymptotic justification of the conserved phase-field model with memory. *Z. Anal. Anwendungen*, 19(4):953–976, 2000.

[17] Veronica Felli. Existence of conformal metrics on $\mathbb{S}^n$ with prescribed fourth-order invariant. *Adv. Differential Equations*, 7(1):47–76, 2002.

[18] Veronica Felli. A note on the existence of H-bubbles via perturbation methods. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 21(1):163–178, 2005.

[19] Veronica Felli. On the existence of ground state solutions to nonlinear Schrödinger equations with multisingular inverse-square anisotropic potentials. *J. Anal. Math.*, 108(1):189–217, 2009.

[20] Veronica Felli, Alberto Ferrero, Susanna Terracini. Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations near an isolated singularity of the electromagnetic potential. *J. Eur. Math. Soc.*, 13:119-174, 2011.

[21] Veronica Felli, Alberto Ferrero, and Susanna Terracini. On the behavior at collisions of solutions to schrödinger equations with many-particle and cylindrical potentials. Preprint 2010.

[22] Veronica Felli, Alberto Ferrero, Susanna Terracini. A note on local asymptotics of solutions to singular elliptic equations via monotonicity methods. Preprint 2011.

[23] Veronica Felli, Emmanuel Hebey, Frédéric Robert. Fourth order equations of critical Sobolev growth. Energy function and solutions of bounded energy in the conformally flat case. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 12(2):171–213, 2005.

[24] Veronica Felli, Elsa M. Marchini, Susanna Terracini. On Schrödinger operators with multipolar inverse-square potentials. *J. Funct. Anal.*, 250(2):265–316, 2007.

[25] Veronica Felli, Elsa M. Marchini, Susanna Terracini. On the behavior of solutions to Schrödinger equations with dipole type potentials near the singularity. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 21(1):91–119, 2008.

[26] Veronica Felli, Elsa M. Marchini, Susanna Terracini. On Schrödinger operators with multisingular inverse-square anisotropic potentials. *Indiana Univ. Math. J.*, 58(2):617–676, 2009.

[27] Veronica Felli, Mohameden Ould Ahmedou. Compactness results in conformal deformations of Riemannian metrics on manifolds with boundaries. *Math. Z.*, 244(1):175–210, 2003.

[28] Veronica Felli, Mohameden Ould Ahmedou. A geometric equation with critical nonlinearity on the boundary. *Pacific J. Math.*, 218(1):75–99, 2005.

[29] Veronica Felli, Angela Pistoia. Existence of blowing-up solutions for a nonlinear elliptic equation with Hardy potential and critical growth. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(1-3):21–56, 2006.

[30] Veronica Felli, Ana Primo. Classification of local asymptotics for solutions to heat equations with inverse-square potentials. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, in corso di stampa.

[31] Veronica Felli, Matthias Schneider. A note on regularity of solutions to degenerate elliptic equations of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type. *Adv. Nonlinear Stud.*, 3(4):431–443, 2003.

[32] Veronica Felli, Matthias Schneider. Perturbation results of critical elliptic equations of Caffarelli-Kohn-Nirenberg type. *J. Differential Equations*, 191(1):121–142, 2003.

[33] Veronica Felli, Matthias Schneider. Compactness and existence results for degenerate critical elliptic equations. *Commun. Contemp. Math.*, 7(1):37–73, 2005.

[34] Veronica Felli, Susanna Terracini. Fountain-like solutions for nonlinear elliptic equations with critical growth and Hardy potential. *Commun. Contemp. Math.*, 7(6):867–904, 2005.

[35] Veronica Felli, Susanna Terracini. Elliptic equations with multi-singular inverse-square potentials and critical nonlinearity. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(1-3):469–495, 2006.

[36] Veronica Felli, Susanna Terracini. Nonlinear Schrödinger equations with symmetric multi-polar potentials. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 27(1):25–58, 2006.

[37] Veronica Felli, Francesco Uguzzoni. Some existence results for the Webster scalar curvature problem in presence of symmetry. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 183(4):469–493, 2004.

[38] W. Hunziker, I. M. Sigal. The quantum N-body problem. *J. Math. Phys.* , 41(6):3448–3510, 2000.

[39] Kazuo Kishimoto, Hans F. Weinberger. The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains. *J. Differential Equations*, 58(1):1521, 1985.

[40] Jean-Marc Lévy-Leblond. Electron Capture by Polar Molecules. *Physical Review*, 153(1):1–4, 1967.

[41] Vladimir Mazya, Serguei Nazarov, Boris Plamenevskij. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. I. *Birkhuser Verlag*, Basel, 2000.