Corso Algebra A. Anno 2004-2005

Argomenti trattati a lezione.

- Prima lezione (16-2-2005).
  Esempi elementari di anelli e campi. L'anello $\mathbb{Z}_m$ delle classi di resto modulo $m \in \mathbb{Z}^+$. Il campo $\mathbb{Z}_p$ (quando p è un numero primo).
  Cosa è un polinomio. L'anello dei polinomi $K[x]$ (dove K è un campo): la divisione euclidea in $K[x]$, l'algoritmo di Euclide, il concetto di massimo comune divisore di due polinomi non entrambi nulli.

- Seconda lezione (23-2-2005).
  Radici di un polinomio. Dimostrazione del Teorema della radice e di alcuni suoi corollari (fra cui "un polinomio di grado $n \geq 1$ in $K[x]$, dove K è un campo, ha al più n radici in K"). Lemma di Bezout per polinomi (dimostrazione facoltativa).
  Definizione di polinomio irriducibile. Dimostrazione del fatto che ogni polinomio irriducibile è primo. Enunciato (senza dimostrazione) del teorema di fattorizzazione unica in prodotto di irriducibili.
  Introduzione al campo dei numeri complessi. Enunciato del Teorema fondamentale dell'algebra (dimostrazione facoltativa, per i coraggiosi). I polinomi irriducibili in $\mathbb{C}[x]$.

- Terza lezione (3-3-2005).
  Chi sono i polinomi irriducibili in $\mathbb{R}[x]$ (con dimostrazione). Alcune osservazioni sui polinomi irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$: il lemma di Gauss, il criterio per trovare una radice in un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$, il criterio di Eisenstein (dimostrazioni facoltative, le trovate sul Childs).
  Introduzione alle congruenze modulo polinomi e ad un metodo per costruire nuovi campi e nuovi anelli (vedi anche appunti integrativi).
  Gli spazi vettoriali, primi esempi. Combinazione lineare di vettori.

- Quarta lezione (9-3-2005).
  Definizione di "insieme di vettori linearmente indipendenti". Esempi. Definizione di base di uno spazio vettoriale. Esempi. Esempio di uno spazio vettoriale di dimensione infinita ($\mathbb{R}[x]$). Enunciato (senza dimostrazione) del teorema che dice che quando uno spazio vettoriale ha una base finita, tutte le basi hanno la stessa cardinalità, e tale cardinalità si dice la dimensione dello spazio vettoriale. Definizione di sottospazio vettoriale. Esempio: i sottospazi di $\mathbb{R}^2$. Definizione di applicazione lineare fra spazi vettoriali. Esempio: le rotazioni nel piano.

- Quinta lezione (16-3-2005).
  Teorema: ogni vettore di uno spazio vettoriale si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi di una base (dimostrazione nelle dispense). Applicazioni lineari e basi: rappresentazione matriciale di una applicazione lineare. Esempio:

la matrice associata ad una applicazione lineare cambia a seconda della base scelta. Definizione della somma e del prodotto fra matrici.
L'anello $End\ \mathbb{R}^n$ delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in sé e l'anello $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$: verifica delle proprietà di anello ed esempio che mostra la non commutatività se $n \geq 2$.
Teorema: una applicazione lineare manda sottospazi vettoriali in sottospazi vettoriali. Definizione di nucleo di una applicazione lineare. Teorema: il nucleo di una applicazione lineare è un sottospazio vettoriale.

- Sesta lezione (23-3-2005).
  Ancora sulle matrici associate ad una applicazione lineare: in particolare si ribadisce che il sottospazio generato dalle colonne di una matrice $[L]$, associata, dopo aver fissato le basi, ad una applicazione $L : V \to W$, coincide con il sottospazio $L(V)$.
  Operazioni elementari sulle colonne di una matrice: descrizione ed esempi. Osservazione: le operazioni elementari sulle colonne sono reversibili, e si possono ottenere moltiplicando la matrice a destra per una certa matrice invertibile.
  Matrici in forma a scalini (per colonne) e in forma a scalini ridotta.
  Si osserva che ogni matrice può essere trasformata in forma a scalini (per colonne) tramite le mosse elementari. Inoltre, il sottospazio generato dalle colonne di una matrice trasformata in forma a scalini e il sottospazio generato dalle colonne della matrice iniziale coincidono.
  Teorema (con dimostrazione): se V è uno spazio vettoriale con una base di cardinalità n, tutte le altre basi dello spazio hanno cadinalità n.
  Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale.

- Settima lezione (Massimo Caboara, 13-4-2005).
  Operazioni elementari su matrici. Riduzione a scala di una matrice qualunque.
  Riduzione a diagonale di una matrice qualunque.
  Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata mediante riduzione a diagonale.
  Definzione di determinante di una matrice quadrata con lo sviluppo di Laplace.
  Regole di calcolo per il determinante. Determinante attraverso la riduzione a scala.

- Ottava lezione (20-4-2005).
  La formula di Grassmann per i sottospazi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita: $dim\ A + dim\ B = dim\ A \cap B + dim\ (A + B)$ (con dimostrazione).
  Teorema: data una applicazione lineare $L : V \to W$ vale che

  $$dim\ Ker\ L + dim\ Imm\ L = dim\ V$$

  Dimostrazione del teorema, durante la quale abbiamo dato le definizioni di somma diretta fra sottospazi e complementare di un sottospazio.
  Corollario: nel caso in cui $dim\ V = dim\ W$ allora L surgettiva implica L bigettiva, e inoltre L iniettiva implica L bigettiva.
  Ricapitolazione delle definizioni di rango riga e di rango colonna di una matrice.

- Nona lezione (26-4-2005).
Data una applicazione lineare L e una matrice $[L]$ ad essa associata abbiamo dimostrato che il RANGO RIGA di $[L]$ è uguale al RANGO COLONNA di $[L]$ che a sua volta è uguale alla dimensione dell' immagine di L. Di conseguenza abbiamo definito (unificando le definizioni precedenti) il RANGO di una applicazione lineare e di una matrice. Per fare la dimostrazione abbiamo utilizzato il seguente teorema (dimostrato): data una applicazione lineare $L : V \to W$ e una applicazione lineare INVERTIBILE $A : W \to W$ vale che $dim\ Imm\ L = dim\ Imm\ A \circ L$.
Altri teoremi dimostrati con lo stesso procedimento:
Teorema: dato un sottospazio vettoriale $S \subset V$ e data una applicazione lineare INVERTIBILE B vale che $dim\ S = dim\ B(S)$.
Teorema: Per calcolare il rango di una matrice possiamo agire con le mosse elementari di riga e di colonna e calcolare il rango della matrice ridotta in cui compaiono solo 1 e 0.
Abbiamo poi visto (senza dimostrazione) come si calcola il rango di una matrice con i determinanti delle sottomatrici. In particolare abbiamo enunciato il Teorema dell'orlare: data una matrice $n \times m$ tale matrice ha rango r se si trova una sottomatrice Γ, di dimensione $r \times r$, con determinante non nullo e inoltre tutte le sottomatrici $(r + 1) \times (r + 1)$ che si ottengono orlando Γ hanno determinante nullo.

- Decima lezione (4-5-2005).
Definizione di autovalore e autovettore di un endomorfismo lineare. Il polinomio caratteristico. Teorema: le radici del polinomio caratteristico associato ad un endomorfismo T sono tutti e soli gli autovalori di T (con dimostrazione). L'autospazio relativo ad un autovalore. Esempi. Il teorema di Cayley-Hamilton. *A riguardo di questa lezione si veda il paragrafo "Autovalori e autovettori di un endomorfismo lineare" nella sezione "Appunti integrativi".*

- Undicesima lezione (25-5-2005).
L'intero contenuto della lezione è facoltativo (consigliato !): ideali in un anello, dimostrazione del teorema che afferma che un anello di polinomi a coefficienti in un campo è un anello a ideali principali, esistenza e prime proprietà del polinomio minimo di un endomorfismo lineare.