Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezioni 18/19 Maggio 2005

Esercizi vari

1. Calcolare il rango della matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Calcolare il rango della matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & t & 1 \end{bmatrix}$$
al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

3. Sia data la matrice
$$M_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
associata ad un morfismo $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Voglio trovare una base F tale che in numero delle entrate della matrice $M^F_{\phi(F)}$ che non sono nulle sia minimo.
Suggerimento: provo a diagonalizzare la matrice. Se la matrice é diagonalizzabile, ho raggiunto un buon risultato. Se no, posso completare l'unione delle basi degli autospazi ad una base di $\mathbb{R}^3$ in modo taleda soddisfare i miei requisiti.

4. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un morfismo tale che $\dim \operatorname{Ker} \phi = 2$ e che $-1, 1$ sono autovalori. Scrivere una matrice associata al morfismo.

5. Sia $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un morfismo tale che $(1, 2, 0, 0), (5, 2, 0, 0) \in \operatorname{Im} \phi$ e che $1, 2$ sono autovalori. Esiste un tale ϕ tale che $\dim \operatorname{Ker} \phi = 2$? Esiste un tale ϕ tale che $\dim \operatorname{Ker} \phi = 0$?

6. Sia $V = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ una base di uno spazio vettoriale V. L'insieme di vettori $v_1 - v_2 + v_3, v_2 - 2v_3 + v_4, v_3 - v_4, v_1 + v_4$ è base di V?

7. Siano
$$V = ((1,0,0,0),(2,4,0,0),(1,1,0,0))$$
e
$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = z = 0\}$$
due sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

   (a) Trovare una base di $V \cap W$ e $V + W$.

   (b) $V \cup W$ è uno spazio vettoriale?

   (c) Sia $u = (1,2,0,3) \in V + W$. Determinare $v \in V, w \in W$ tali che $u = v + w$.

8. Determinare il numero di soluzioni razionali del sistema
$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \\ x + 2y + 4z = 4 \end{cases}$$

9. Determinare il numero di soluzioni razionali del sistema
$$\begin{cases} x + y + z + w = 5 \\ 2x + y + az + bw = c \\ y + 3z + w = 1 \end{cases}$$
al variare di $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

10. Per lo spazio vettoriale $\mathbb{Z}_5[x]$,

    (a) $\{x^n - n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è base?

    (b) $\{(x-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è base?

11. L'insieme di vettori $\{x^3, x^3 - x^2, x^3 + x^2 - x, x^3 + x^2 + x + 1\}$ è base dello spazio vettoriale $\mathbb{Q}[x]_{\leq 3}$?

12. Trovare $\dim_{\mathbb{R}}\langle (i+1, 3+2i), (i-1, i)\rangle \subset \mathbb{C}^2$.

13. Trovare una matrice M associata al polinomio caratteristico $x^4 - 4$.

14. Trovare una matrice M associata al polinomio caratteristico $x^5 - 4$.

Esercitazione guidata

15. Es. 6.1. Al variare di $k, b \in \mathbb{R}$, studia le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 8x_3 = -1 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = b \end{cases}$$

Soluzioni: se $4 \neq k \neq -1/4$, esiste un unica soluzione $\forall\ bin\mathbb{R}$. Se $k = 4$, il sistema è impossibile $\forall\ b \in \mathbb{R}$. Se $k = -1/4$ il sistema ammette ∞^1 soluzioni se $b = \frac{56}{17}$, impossibile per gli altri $b \in \mathbb{R}$.

16. Es 7.2. Sia $\phi : \mathbb{R}[t]_{\leq 4} \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{\leq 4}$ data da $\phi(p(t)) = p(t+7)$. Dimostra che ϕ è un isomorfismo e trova l'inversa di ϕ.
Soluzioni: Si può dimostrare che ϕ è lineare con la definizione. L'iniettività e' banale, e dato che dominio e codominio sono uguali, si ha la surgettività. Quindi ϕ è un isomorfismo. Facendo i conti si può dimostrare che $\psi(p(t)) = p(t-7)$ è l'inversa di ϕ.

17. Trova i $t \in \mathbb{R}$ per cui la matrice

$$A = \begin{bmatrix} t & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.
Soluzioni: Il polinomio caratteristico è $P(\lambda) = (t-\lambda)(1-\lambda)(\lambda^2 - (t+2)\lambda + 2t + 1)$ e gli autovalori $1, t, \frac{1}{2}(t + 2 + \sqrt{t^2 - 4t})$, tutte distinte tranne per $t = 0, 1, 4$ e tutte reali se $t \notin (0, 4)$.
Quindi se $t \notin \{0, 1, 4\}$ e $t \notin (0, 4)$ A è diagonalizzabile.
Se $t = 0$, A non è diagonalizzabile.
Se $t = 1$, A è diagonalizzabile.
Se $t = 4$, A non è diagonalizzabile.

18. Siano dati i polinomi $p_1(t) = t^2 + t$, $p_2(t) = 2t^2 + 3t + 1$ e $p_3(t) = -t^2 + 2 \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$ e $q_1(t) = -t^2$, $q_2(t) = -2t^2 - t - 2$ e $q_3(t) = t^2 + t \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$.

    (a) Dimostra che $F = (p_1, p_2, p_3)$ e $E = (q_1, q_2, q_3)$ sono basi di $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$.

    (b) Calcola le corrdinate dei vettori di F in base E.

    Soluzioni: Scriviamo p_1 nelle coordinate della base $1, t, t^2$. Abbiamo che $p_1 = (0, 1, 1)$, $p_2 = (1, 3, 2)$ e $p_3 = (2, 0, -1)$. Vediamo facilmente che questi tre vettori sono linearmente indipendenti e che quindi generano $\mathbb{R}_{\leq 2}[t]$, che ha dimensione 3. Analogamente si ragiona per E. Per avere le coordinate dei vettori di F in base E, troviamo le coordinate dei vettori $1, t, t^2$ nella base E, e da questi, sostituendo nelle espressioni dei vettori di F nella base canonica, le coordinate dei vettori di F in base E.

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`