Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezioni 11/12 Maggio 2005

Diagonalizzazione di matrici

Trovate tutti gli esercizi svolti dei compiti/compitini degli anni passati sul sito `www.dm.unipi.it/ martelli/` sotto Didattica, Algebra. In patricolare, l'esercizio proposto nell'esercitazione guidata in classe si trova nella soluzione del quinto compito.

Autovalori e autovettori

1. Sia $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un morfismo. Dimostrare che il determinante della matrice associata ϕ non dipende dalle basi che scelgo per esprimere ϕ.
   Suggerimento: Il cambiamento di base per un morfismo ϕ è realizzato dalla moltiplicazione della matrice M_ϕ a destra per una matrice invertibile P e a sinistra per P^{-1}. Usare il teorema di Binet.

2. Sia $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo diagonalizzabile di spazi vettoriali tale che 0 è autovalore con molteplicità 2 e 1 è autovalore con molteplicità 1. Sia M_ϕ una matrice associata a ϕ.
   (a) Calcolare il determinante di M_ϕ.
   (b) Descrivere tutti i possibili morfismi che soddisfano le condizioni su ϕ.

   (a) Dato che il determinante di una matrice non cambia quando cambiamo base, e che esiste una base per cui M_ϕ è diagonale con due zeri sulla diagonale, il determinate di M_ϕ è 0.
   (b) Possiamo scegliere le basi che rendono il morfismo diagonale. Ci riduciamo quindi a trovare tutte le matrici diagonali con due 0 ed un 1 sulla diagonale, che sono 3.

3. Caratterizzare tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}^5$ la cui matrice associata è diagonalizzabile ed ha un solo autovalore.

4. Caratterizzare tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}^5$ la cui matrice associata è diagonalizzabile ed ha un tre autovalori.

5. Sappiamo che la matrice $M \in \mathrm{Mat}_{5\times 5}(\mathbb{Q})$ ha come autovalori $1, 2, 3, 4, 5$. Calcolare il determinante di M.

6. Caratterizzare tutti i morfismi $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tali che $\phi(e_1) = e_1$ a che la matrice associata al morfismo non sia diagonalizzabile.
   Possiamo supporre che la matrice associata a ϕ rispetto alle basi canoniche sia $M = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Dobbiamo altresi' avere $a \neq 0$, altrimenti la matrice è già diagonale. Calcoliamo $P(\lambda)$,il polinomio caratteristico di M
   $$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & b-\lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 - \lambda(1+b) + b$$
   Abbiamo
   $$\lambda_{1,2} = \frac{(1+b)|b-1|}{2}$$
   Quindi

   - se $b \neq 1$ abbiamo due radici distinte di molteplicità 1, $\lambda = 1$ e $\lambda = b$. In questo caso la matrice è diagonalizzabile.
   - Se $b = 1$ abbiamo la radice $\lambda = 1$ di molteplicità 2. Calcoliamo la malteplicità geometrica dell'autovalore 2, cioè la dimensione dell'autospazio A_2 associato all'autovalore.
     $$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid M \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\}$$
     quindi
     $$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (M - I_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0\right\}$$
     Per il teorema di Rouchè Capelli la dimensione di A_1 è uguale al numero di variabili-rango della matrice $(M - I_2)$, cioè
     $$2 - \rho((M - I_2)) = 2 - \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$
     e quindi $dim(A_1) = 1$ dato che $a \neq 0$, e la molteplicità algebricha e geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ sono diverse, e la matrice è quindi non diagonalizzabile.

7. Trovare altre classi di matrici non diagonalizzabili. Suggerimento: matrici triangolari superiori con pochi elementi non nulli sopra la diagonale.

8. Quante sono i morfismi $\phi \in \mathrm{End}(\mathbb{Z}_5^3, \mathbb{Z}_5^3)$ a matrice diagonalizzabile?

9. Le matrici simmetriche di ordine 2 su $\mathbb{R}$ sono tutte diagonalizzabili? Suggerimento: procedere come nell'esercizio precedente. Le matrice reali simmetriche di ordine 2 hanno la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

10. Le matrici simmetriche di ordine 3 su $\mathbb{R}$ sono tutte diagonalizzabili? Esprimere un opinione motivata. Per gli entusiasti, provare a dimostrare.

11. Si consideri la seguente matrice, dipendente da un parametro $t \in \mathbb{R}$

$$A_t = \begin{bmatrix} t & 2 & 0 \\ t & 2 & 0 \\ t & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Per quali t la matrice A_t è diagonalizzabile?
IL polinomio caratteristico di A_t è

$$P(\lambda) = \det(A_t - \lambda I) = (2-\lambda) \det\left(\begin{bmatrix} t-\lambda & 2 \\ t & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-(t+2))$$

Gli autovalori sono quindi

$$\lambda = 0$$
$$\lambda = 2$$
$$\lambda = t + 2$$

Se $\mathbf{0} \neq \mathbf{t} \neq \mathbf{2}$, abbiamo tre autovalori distinti. Dato che ogni autospazio ja dimensione almeno 1, e la somma delle dimensioni degli autospazi è, nel nostro caso, 3, abbiamo che le dimensioni dei tre autospazi sono esattamente 1, e quindi la molteplicità geometrica (dim. autospazio) è uguale alla molteplicità algebrica (molteplicità della radice) per ogni autovalore e la matrice è quindi diagonalizzabile. Per trovare espicitamente la base che rende A_t diagonale, troviamo le basi dei tre autospazi.
Cominciamo con A_2. Sappiamo che $0 \neq t \neq 2$ e abbiamo che

$$A_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A_t - 2I = 0\right\}$$

Cerchiamo quindi una base del sistema $A_t - 2I = 0$, cioè

$$\begin{bmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Vale a dire

$$\begin{cases} (t-2)x + 2y = 0 \\ tx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Una base di A_2 è quindi $(0,0,1)$. Per trovare le basi di A_0, A_t si procede in modo analogo.

Se $\mathbf{t} = \mathbf{0}$, abbiamo l'autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica 1 e l'autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 2. Dato che l'ordine della matrice è 3, per controllare la diagonalizzabilità ci basta controllare se la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ sia 2. In caso affermativo, la molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è forzata ad essere 1, uguale alla molteplicità algebrica, e la matrice è quindi diagonalizzabile. In caso negativo, la matrice non è diagonalizzabile.

La molteplicità geometrica di $\lambda = 2$ è uguale alla dimensione dell'autospazio A_2, che si vede falcilmente essere uguale a $3 - \rho(A - 2I)$ per la definizione di A_2 ed il teorema di Rouchè-Capelli. Abbiamo $t = 0$ e

$$3 - \rho(A - 2I) = 3 - \rho\left(\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 3 - 1 = 2$$

Quindi A è diagonalizzabile per $t = 0$. Una base di A_0, A_2 si trova come sopra.

Il caso $\mathbf{t} = \mathbf{2}$ si tratta in modo analogo, e si conclude che in questo caso A non è diagonalizzabile, essendo la molteplicità geometrice a quella algebrica di $\lambda = 0$ differenti.

Somma diretta

Definizione: Dati due sottospazi V, W di uno spazio vettoriale U, la somma $V * W$ si dice diretta se $V \cap W = (0)$ e si scrive $V \oplus W$.

12. Dare un esempio di somma diretta e di somma che non sia diretta.

13. Siano V, W due sottospazi di uno spazio vettoriale U tali che somma $V * W$ sia diretta. Dimostrare che

    (a) Una base di $V \oplus W$ è data dall'unione dei due basi di V, W rispettivamente.

    (b) $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$.

    (c) Dato $u \in V \oplus W$, abbiamo che esistono unici $v \in V$, $w \in W$ tali che $u = v + w$.

14. Siano V, W due sottospazi di uno spazio vettoriale U tali che somma $V * W$ non sia diretta. Dimostrare che per ogni $u \in V + W$ esistono due coppie distinte di vettori $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$ tali che $v_1 + w_1 = v_2 + w_2 = u$.

15. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, esistono infinite coppie distinte $(v, w) \in V \times W$ tali che $v + w = u$?
SI

16. Siano $V = ((1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1))$ e $W = ((1, 1, 0, 0), (1, 1, 2, 2))$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4$.

    (a) Trovare una base di $V + W$.

    (b) La somma $V + W$ è somma diretta?

    (c) Al variare di $a \in RR$ trovare se possibile $(v, w) \in V \times W$ tale che $v + w = (1, a, a + 1, a - 2)$.

17. Siano $V = (e_1, e_3)$ e $W = (e_1, e_2, e_4)$ due sottospazi di $\mathbb{R}^5$. Dimostrare che $V + W$ non è diretta. Trovare almeno tre rappresentazioni diverse come somme di elementi di V, W del vettore $(1, 0, 0, 2, 3)$.

18. Siano $V = (e_1, e_3)$ e $W = (e_2, e_4)$ due sottospazi di $\mathbb{R}^5$. Dimostrare che $V + W$ è diretta. Trovare una rappresentazione di $(1, 2, 3, 4, 0)$ come somma di elementi di V, W.

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`