Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezioni del 5 Maggio 2005

Spazi vettoriali: Coefficenti particolari

1. Dimostrare che $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale di dimensione 1. Trovare una base di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{R}$ spazio.

2. Dimostare che $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{Q}$ spazio vettoriale.

3. Siano $(1,2), (\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ vettori di $\mathbb{R}^2$.

   (a) Sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$?

   (b) Sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$?

   a: No, infatti $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}(1,2)$ e quindi uno è multiplo dell'altro.
   b: Usiamo la definizione: $a(1,2) + b(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 0$ deve implicare $a = b = 0$. E infatti dalla condizione deduciamo

   $$\begin{cases} a + \sqrt{2}b = 0 \\ 2a + 2\sqrt{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \sqrt{2}b = 0 \end{cases}$$

   da cui se $b \neq 0$ abbiamo $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$, il che è assurdo in quanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Quindi $b = 0$ da cui $a = 0$ e abbiamo la tesi.

4. Determinare la dimensione di $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$ spazio vettoriale.
   I vettori $\sqrt{p}$, dove p è primo sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$, [dimostrare per esercizio] quindi $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.

5. Sia $V = ((1,2), (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), (\sqrt{3}, 2\sqrt{3})) \subset \mathbb{R}^2$. Determinare la dimensione di V come $\mathbb{Q}$ spazio, $\dim_{\mathbb{Q}} V$.
   [3]

6. Dimostrare che $\mathbb{C}^n$ è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.
   Usare la definizione.

7. Scrivere una base di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$ spazio.
   $((1), (i))$.

8. Scrivere una base di $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{R}$ spazio.
   $(1,0),(i,0),(0,1),(0,i)$.

9. Dare una base di $\mathbb{C}^n$ come $\mathbb{R}$ spazio.

10. Sia $V = \{(a, 2a, a+3b, ia) \in \mathbb{C}^3 \mid a, b \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^3$.

    (a) V è un $\mathbb{C}$ sottospazio di $\mathbb{C}^2$?

    (b) Trovare una $\mathbb{C}$ base di V in caso affermativo.

    (c) V è un $\mathbb{R}$ sottospazio di $\mathbb{C}^2$?

    (d) Trovare una $\mathbb{R}$ base di V in caso affermativo.

Isomorfismi

Definizione: Siano V, W due k spazi vettoriali e $\phi : V \longrightarrow W$ una applicazione lineare, iniettiva e surgettiva. Allora ϕ si dice isomorfismo di k spazi vettoriali e V, W si dicono isomorfi $V \simeq W$ mediante ϕ.

11. Se $V \simeq W$ mediante ϕ. Allora

    (a) $W \simeq V$.

    (b) ϕ^{-1} è una applicazione lineare.

    (c) Se M_ϕ è la matrice associate a ϕ, M_ϕ è invertibile e la matrice associata a ϕ^{-1} è M_ϕ^{-1}.

    (d) $\dim V = \dim W$.

    (e) ϕ manda una base di V in una base di W.

    (f) Se $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora $\phi(v_1), \ldots, \phi(v_n)$ sono linearmente indipendenti.

    (g) Se $w_1, \ldots, w_n \in W$ sono linearmente indipendenti, allora $\phi^{-1}(w_1), \ldots, \phi^{-1}(w_n)$ sono linearmente indipendenti.

12. Dimostrare che $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{C}^2$ sono isomorfi.
    L'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (1,0) & \rightsquigarrow & e_1 \\ & (i,0) & \rightsquigarrow & e_2 \\ & (0,1) & \rightsquigarrow & e_3 \\ & (0,i) & \rightsquigarrow & e_4 \end{array}$$

    è lineare, iniettiva e surgettiva.

13. Usando il morfismo dell'esercizio precedente, trovare $\phi((i+1,i))$,$\phi((2+3i, 4-3i))$,$\phi((1,1,1,1))^{-1}$.
    $(1,1,0,1)$,$(2,3,4,-3)$ e $(1+i, 1+i)$ rispettivamente.

14. Dimostrare che $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^{2n}$ sono isomorfi.
15. Sia $V = \{(a + 2b, a - 3b) \in \mathbb{Q}^2 \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dimostrare che $V \simeq \mathbb{Q}^2$.
16. Se V, W sono due spazi vettoriali tali che $V \simeq W$, è vero che $W \simeq V$?
17. È possibile avere che $A \simeq B$ e $B \simeq C$ e $C \not\simeq A$ per A, B, C spazi vettoriali?

Sistemi su campi

18. Risolvere il sistema
$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 3x + 4y - 6z = 0 \\ 3x - 11y + 12z = 0 \end{cases}$$
con $x, y, z \in \mathbb{R}$.
19. Sia $Ax = b$, $A \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(k)$ un sistema lineare su k con $n > m$. Siano le prime m equazioni indipendenti. Cosa c'è di sbagliato nel ragionamento seguente: posso portare la prime m righe della matrice a diagonale $(1, \dots, 1)$. Le rimananti righe si riducono alla riga nulla mediante Gauss. Qundi le righe dopo la m-esima sono ininfluenti per le soluzioni del sistema.
20. Definizione: L'insieme delle frazioni di polinomi a n variabili $x_1, \dots, x_n$ su k si indica $k(x_1, \dots, x_n)$.

    Nota bene: un elemento di $k(x_1, \dots, x_n)$ é ben definito se si scrive come $\frac{f(x_1,\dots,x_n)}{g(x_1,\dots,x_n)}$, dove $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ e $g \neq 0$ **come polinomio**. Un elemento di $k(x_1, \dots, x_n)$ é uguale a 0 solo se si scrive come $\frac{0}{f(x_1,\dots,x_n)} = 0$, dove $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ (f è un polinomio nelle variabili $x_1, \dots, x_n$). Un elemento f/g di $k(x_1, \dots, x_n)$ si può identificare con una funzione $f/g : k^n \longrightarrow k$ tale che $f/g(a_1, \dots, a_n) = \frac{f(a_1,\dots,a_n)}{g(a_1,\dots,a_n)} \in k$ che non è in generale definita su tutto k^n, in quantgo possono esserci dei punti $(b_1, \dots, b_n) \in k^n$ tali che $g(b_1, \dots, b_n) = 0$ e quindi la funzione f/g (ma NON l'elemento $f/g \in k(x_1, \dots, x_n)$) perde significato.
21. Scrivere tre elementi di $k(x, y)$ che non appartengono a $k[x, y]$.
    x/y, $\frac{x+y}{xy}$, $\frac{x^2+y+1}{x^2-1}$
22. Trovare il dominio della funzione associata a $\frac{x}{x^2-y^2} \in \mathbb{R}(x, y)$.
    $\mathbb{R}^2 - (\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\})$.

23. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} yg(x,y) - f(x,y) = -x \\ xy^2 g(x,y) - x^2 y f(x,y) = 0 \end{cases}$$

con $f(x,y), g(x,y) \in k(x,y)$.
Sostituiamo alla seconda equazione la seconda meno la prima moltiplicata per xy e otteniamo $f(x,y)(x^2y - xy) = x^2y$. Dividiamo ambedue i membri per xy (che è sempre $\neq 0$ come elemento di $k(x,y)$), risolviamo e otteniamo $\boxed{f(x,y) = \frac{x}{x-1}}$. Sostituiamo il valore di $f(x,y)$ nella prima equazione e otteniamo $\boxed{g(x,y) = \frac{-x+\frac{x}{x-1}}{y} = -\frac{x^2}{y}}$.

24. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} yg(x,y) - f(x,y) - xyh(x,y) = -x \\ xy^2 g(x,y) - x^2 y f(x,y) + (x+y)h(x,y) = 0 \end{cases}$$

con $f(x,y), g(x,y), h(x,y) \in k(x,y)$.

25. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} xg(x) - f(x) - xh(x) = -x \\ x^2 g(x) - x^2 f(x) + (x)h(x) = 0 \end{cases}$$

con $f(x), g(x), h(x) \in k[x]$.

26. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 5x - 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 5 \end{cases}$$

con $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
Suggerimento: Non possiamo dividere, in generale, se stiamo lavorando su $\mathbb{Z}$, ma possiamo lo stesso triangolarizzare il sistema usando moltiplicazioni al posto delle divisioni nell'algoritmo di Gauss.

27. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 5x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

con $x, y, z \in \mathbb{Z}$.
Suggerimento: Portiamo il sistema in forma triangolare operando come nell' esercizio precedente. Se la seconda equazione rimane in due variabli, la risolviamo come equazione diofantea (algoritmo euclideo esteso per la soluzione particolare, aggiungiamo le soluzioni dell'omogenea associata) e sostituiamo nella prima equazione i valori di y, z che abbiamo trovato.

28. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

con $x, y, z \in \mathbb{Z}_5$.
Suggerimento: triangolarizziamo con Gauss ricordandoci che in $\mathbb{Z}_5$ abbiamo che

$$\frac{1}{2} = 3$$
$$\frac{1}{3} = 2$$
$$\frac{1}{4} = 4$$

Per ulteriori esercizi sui sistemi, si consiglia $S.Lipschutz, AlgebraLineare, collanaSchaum.$

Polinomi e matrici

29. Sia $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$ tale che $M^3 - M^2 + 2M - 11I_n = 0$ e che non esiste nessun polinomio in M di grado inferiore che si annulli. Dimostrare che M è invertibile.
Sciviamo la relazione precedente in forma equivalente $\frac{1}{11}(-M^3 + M^2 - 2M)M = I_n$. Quindi esiste Y tale che $YM = I_n$ e quindi M è invertibile. Per di più, $M^{-1} = \frac{1}{11}(-M^3 + M^2 - 2M)$

30. Sia $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$ tale che esista un polinomio $f(x) \in k(x)$ con termine noto non nullo tale che $f(M) = 0$. Dimostrare che M è inveribile.

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`