# Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezioni del 28 Aprile 2005

**Sistemi**

1. Descrivere la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + (h-1)z = 1 \\ 2x - 4y + 3hz = h \\ -x + 2y + (h + 5z) = 2 \end{cases}$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2. Descrivere la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Descrivere la dimensione dell'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

**Operazioni sugli spazi vettoriali**

4. Estrarre un insieme massimale di vettori indipendenti da $B = \{(1, 2, 3, 2, 1), (3, 4, 5, 4, 3), (7, 6, 5, 4, 3), (10, 14, 18, 14, 10), (11, 16, 21, 16, 11)\}$.

5. Al variare di $b \in \mathbb{R}$, estrarre un insieme massimale di vettori indipendenti da $B = \{(b, 2, 3b, 2, 1), (3, 4, 5, 4, 3), (7, 6, 5, 4, 3), (10, 14, 18, 14, 10), (11, 16, 21, 16, 11)\}$.

6. Sia $V = \{(x+y+2z, 2x+2z, x+y+2z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Determinare una base di $V$.
Dato che $(x+y+2z, 2x+2z, x+y+2z) = x(1,2,1)+y(1,0,1)+z(2,2,2) = xv_1 + yv_2 + zv_3$, i tre vettori $v_1, v_2, v_3$ generano $V$. Dato che $v_1 + v_2 = v_3$, non sono indipendenti. Consideriamo $v_1, v_2$, che generano comunque $V$. La matrice
$$\begin{bmatrix} 1,2,1 \\ 1,0,1 \end{bmatrix}$$
ha rango 2, in quanto $\det\left(\begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,0 \end{bmatrix}\right) \neq 0$. Allora le due righe $v_1, v_2$ sono lineramente indipendenti e $(v_1, v_2)$ è una base di $V$.

7. Abbiamo gli spazi vettoriali
$$V = ((1,2,3),(2,1,0))$$
e
$$W = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 6y - 7z = 0 \end{cases} \right\}$$
Determinare $V + W$ e $V \cap W$.
**V + W**: Ci conviene trovare una base di $W$. Il sistema di equazioni le cui soluzioni costituiscono $W$ si può scrivere come
$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}z \\ y = \frac{7}{6}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}a \\ y = \frac{7}{6}a \\ z = a \end{cases} \quad \text{(in parametriche)}$$
Il vettore $(-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1)$ genera quindi $W$ e $((-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1))$ è una base di $W$.
Quindi $V + W = ((1,2,3),(2,1,0),(-\frac{2}{3}, \frac{7}{6}, 1))$.
**V ∩ W**: Ci conviene scrivere $V$ come soluzione di un sistema lineare; bisogna quindi trovare un tale sistema
$V$ è generato da $(1,2,3),(2,1,0)$ e quindi ogni vettore di $V$ si scrive come $a(1,2,3) + b(2,1,0) = (a+2b, 2a+b, 3a)$ per specifici $a, b \in \mathbb{R}$. Dobbiamo trovare le relazioni tra le componenti che descrivono $V$; diamo nome $x, y$ e $z$ rispettivamente alla prima, seconda e terza componente. Abbiamo che
$$\begin{cases} x = a + 2b \\ y = 2a + b \\ z = 3a \end{cases}$$

Risolviamo rispetto ad $a, b$ ed troviamo la forma equivalente del sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ b = y - \frac{z}{3} \\ a = \frac{z}{3} \end{cases}$$

Abbiamo quindi che $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$.
Quindi

$$V \cap W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 3x + 2z = 0 \\ 6y - 7z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

8. Nell'esercizio precedente, trovare una base per $V + W$ e una per $V \cap W$.

9. Siano

$$V = ((1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 1))$$

e

$$W = ((1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1, 0), (0, 1, -2, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0))$$

due sotto spazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$. Trovare basi per $V + W, W \cap W$.

10. Siano

$$V = ((1, 3, -3, -1, -4), (1, 4, -1, -2, -2), (2, 9, 0, -5, -2))$$

e

$$W = ((1, 6, 2, -2, 3), (2, 8, -1, -6, -5), (1, 3, -1, -5, -6))$$

due sotto spazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$.Trovare $\dim(V + W), \dim(V \cap W)$. Trovare basi per $V, W$.

11. Siano

$$V = \mathbb{Z}_3[x]_{-} \leq 3 \text{ e } W = \{f \in \mathbb{Z}_3[x] \mid (x - 2) \mid f\}$$

due sottospazi di $\mathbb{Z}_3[x]$.
Determinare $V + W$ e $V \cap W$.
Conviene innanzitutto trovare basi per $V$ e $W$. È ovvio che $(1, x, x^2, x^3)$ è una base per $V$. Dimostriamo che $B = (x - 2, x(x - 2), \ldots, x^n(x - 2), \ldots)$ è una base per $W$. Gli elementi di $B$, avendo tutti grado diverso, sono linearmente indipendenti (altrimenti avremmo un uguaglianza (DI POLINOMI) tra polinomi di grado diverso). Bisogna dimostrare che $B$ genera $W$. Procediamo per induzione sul grado di $f \in W$. Sia $f \in W$ t.c.$\partial(f) = n$. Dato che $(x - 2) \mid f$ abbiamo che $\exists\ g \in \mathbb{Z}_3[x]$ t.c.$f = (x-2)g$; ma $g = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + 1$. Quindi $f = a_{n-1}x^{n-1}(x-2) + a_{n-2}x^{n-2}(x - 2) + \cdots + (x - 2)$ e $f$ è combinazione lineare su $\mathbb{Z}_3$ di elementi di $B$.
**V + W**: $V + W = (1, x, x^2, x^3, x - 2, x(x - 2), \ldots, x^n(x - 2), \ldots)$. Dato che

$$x-2 = 1\cdot x + -2\cdot 1$$
$$x(x-2) = 1\cdot x^2 + -2\cdot x$$
$$x^2(x-2) = 1\cdot x^3 + -2\cdot x^2$$

abbiamo che $V+W = (1, x, x^2, x^3, x^4(x-2), \ldots, x^n(x-2), \ldots)$.
$\mathbf{V}\cap\mathbf{W}$: per quanto visto sopra, i primi tre elementi di $B$ appartengono a $V$, e sono i soli elementi di $B$ per cui ciò vale. Quindi $(x-2, x(x-2), x^2(x-2)) \subset V\cap W$. Dimostriamo che $(x-2, x(x-2), x^2(x-2))$ è una base di $V\cap W$. I tre vettori sono indipendenti (grado diverso, o se si preferisce elementi di una base di $W$). Generano $V\cap W$ dato che I polinomi in $V\cap W$ sono quelli di grado $\leq 3$ e appartenti a $W$, e $(x-2, x(x-2), x^2(x-2))$ generano tutti i polinomi di questo tipo.

12. Siano
$$V = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid (x-1)(x-2) \mid f\} \text{ e } W = \{g \in \mathbb{Q}[x] \mid x(x-1) \mid f\}$$
due sotto spazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$. Trovare basi per $V+W, W\cap W$.

13. Se una base di $\mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ è composta di elementi dello stesso grado, qual'è questo grado?

14. Trovare una base di $\mathbb{Q}[x]_{\leq}2$ i cui elementi abbiano tutti lo stesso grado.

15. Sia $V$ il sottoinsieme di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ descritto sotto.
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = 0 \right\}$$
$V$ è sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$?

16. Sia $V$ il sottoinsieme di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ descritto sotto.
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
$V$ è sottospazio vettoriale di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$?

17. Siano
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ a-b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \text{ e } W = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = 0 \right\}$$
due sotto spazi vettoriali di $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Trovare basi per $V+W, W\cap W$.

18. Sia $X \in \mathrm{Mat}_{6\times 6}\,\mathbb{Q}$ tale che $X^3 = 0$. È vero che le matrici $X - I_6$ e $X^2 + X + I_6$ sono invertibili? Se possibile, determinare le inverse.

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`