

Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezioni del 20 Aprile 2005

Sistemi di equazioni

1. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 4 \\ 2x + y + 3z + 2t = 1 \\ 2y + z + t = 3 \\ 3x + y + 3z + 4t = 2 \end{cases}$$

in $\mathbb{Z}_5$.

2. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 4 \\ 2x + ay + 3z + 2t = 1 \\ 2y + z + t = 3 \\ 3x + y + 3z + 4t = 2 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}$. $a \in \mathbb{R}$.

3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

in $\mathbb{Z}_3$.

4. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + ay + z = 0 \\ x + z = 0 \\ 2y + z = a + 2 \end{cases}$$

in $\mathbb{Z}_3$. $a \in \mathbb{Z}_3$.

Spazi vettoriali

5. Siano

$$V = \{(1/2, 2 - a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

e

$$W = \{(1/2, b, 2 - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$.

(a) V, W sono spazi vettoriali?

(b) $V = W$?

$(0, 0, 0) \notin V, W$, dato che la prima componente di un vettore appartenente a V, W è sempre $1/2$. Quindi V, W non sono spazi vettoriali. Vediamo se $V = W$. Voglio dimostrare che $v \in W \forall v \in V \Leftrightarrow V \subset W$ e $w \in V \forall w \in W \Leftrightarrow W \subset V$. Dimostriamo la prima affermazione. Raccogliendo a, b posso scrivere

$$\begin{aligned} V &= \{(1/2, 2, 0) + a(0, -1, 1) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ W &= \{(1/2, 0, 2) + b(0, 1, -1) \mid b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Notiamo che $(1/2, 2, 0) = (1/2, 0, 2) + 2(0, 1, -1)$, [ottengo $(1/2, 2, 0)$ dal vettore generico di W dando a b il valore 2] e quindi $(1/2, 2, 0) \in W$. Un vettore v di V si scrive, per definizione di V come $(1/2, 2, 0) + a(0, -1, 1)$ per un qualche $a \in \mathbb{R}$. Quindi

$$v = (1/2, 2, 0) + a(0, -1, 1) = (1/2, 0, 2) + (a+2)(0, -1, 1)$$

quindi $v \in W$ [ottengo v dal vettore generico di W con $b = a+2$]. La dimostrazione della seconda proposizione è analoga.

6. Siano $V = \{(a+b+2, b+2, a+b+1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ e $W = \{(2a+2, a+b+2, 2a+1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

(a) V, W sono spazi vettoriali?

(b) $V = W$?

7. Abbiamo i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$V = ((1, 2, 3, 2), (3, 2, 1, 1), (8, 8, 8, 5))$$

e

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = x - y - y = x - y + z + t = 0\}$$

- Trovare la dimensione di V, W .
- Trovare una base di V, W .

- $V = W$?

8. Abbiamo i due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

$$V = ((1, 2, 3, 2), (3, 2, 1, 1), (8, 8, 8, 6))$$

e

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z = x - y - 3y = 2x - y + z + t = 0\}$$

- Trovare la dimensione di V, W .
 - Trovare una base di V, W .
 - $V = W$?
9. Sia $V = ((1, 2, 3, 4), (2, 1, 2, 0), (1, 1, 0, 0)) \subset \mathbb{R}^3$. Quali tra i vettori $(1, 2, 1, 2)$, $(4, 4, 6, 4)$, $(4, 6, 8, 1)$, $(2, 2, 2, 2)$ appartengono a V ?
10. Sia $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = y + z + t = x + z + t = 0\}$.
- Trovare una base di V .
 - Completare una base di V a base di $\mathbb{R}^4$.

Rango di una matrice e Teorema di Rouchè-Capelli

11. Sia $A \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$. Definiamo come rango della matrice A , e scriviamo $\rho(A)$, l'ordine del più grande minore a determinante non nullo contenuto in A . Un minore B contenuto in A di ordine r è una sottomatrice quadrata di A data dalla scelta arbitraria di r righe ed r colonne di A .

Esempio di minore: abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

scegliendo le righe 1, 3, 4 e le colonne 2, 4, 6 otteniamo il minore

$$M_{\{1,3,4\},\{2,4,6\}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Notiamo che

- Il determinante del minore B dato dalla scelta di delle righe $r_1 \dots, r_t$ e delle colonne $c_1 \dots, c_t$ è non nullo se e solo se il determinante di ogni minore dato da una scelta di righe e colonne che siano una permutazione di $r_1 \dots, r_t$ e $c_1 \dots, c_t$ rispettivamente non è nullo. Quindi al fine di calcolare il rango possiamo supporre $r_1 > \dots > r_t$ e $c_1 > \dots > c_t$.
- $\rho(I_n) = n$.
- Se A è la matrice diagonale di diagonale $a_1, \dots, a_n$ notiamo che $\rho(A) = \#\{i \mid a_i \neq 0\}$.

Esempio: calcoliamo il rango della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dato che la matrice contiene il minore $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ di determinante non nullo, $\rho(A) \geq 2$. Dato che la quarta riga è somma della seconda e della terza riga, nessun minore che contenga tutte le tre righe può avere determinante non nullo. Quindi posso scegliere solo tre righe, quindi $\rho(A) \leq 3$. Rimane da vedere se $\rho(A) = 2$ o 3 . Cerchiamo un minore 3×3 con determinante non nullo, che deve avere 1, 2, 3 come righe. Vediamo che i minori $M_{\{1,2,3\},\{1,2,3\}}$ e $M_{\{1,2,3\},\{1,2,4\}}$ hanno determinante nullo mentre il minore $M_{\{1,2,3\},\{1,2,5\}}$ ha determinante non nullo. Il rango di A è quindi 3.

12. Dimostrare che tutte le operazioni elementari su una matrice A che non cambiano il fatto che il determinante sia o no nullo non cambiano il rango. Questo è ovvio per lo scambio di righe e di colonne, in quanto l'insieme dei minori non cambia. Possiamo quindi sempre supporre che i minori che considereremo siano situati nell'angolo in alto a sinistra della matrice. Le operazioni elementari rimanenti comportano la moltiplicazione a sinistra della matrice per una matrice triangolare con diagonale non nulla. Il minore viene quindi moltiplicato per una matrice triangolare con determinante non nullo, e la nullità del suo determinante è quindi invariata.
13. Dimostrare che data $A \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$, il rango di A è uguale al numero di righe non nulle di una riduzione a scala di A .
14. Dimostrare che il rango di A è uguale al numero di righe linearmente indipendenti di A .
Riduciamo a scala la matrice A . Questo non cambia il rango. Il rango di una matrice a scala è uguale al numero di righe non nulle r , in quanto un minore che contenga tutte e sole le righe non nulle e le opportune colonne ha determinante sicuramente non nullo. Ogni minore di ordine maggiore

contiene una riga nulla e ha quindi determinante nullo. Quindi la riduzione a scala di A ha rango r , ed anche A .

15. Calcolare il rango delle matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

16. Teorema di Rouchè-Capelli. Data un sistema $Ax = b$, chiamiamo B la matrice $[A \mid b]$ (matrice completa: aggiungiamo il vettore colonna a destra di A). La matrice A si dice incompleta. Allora

- (a) Il sistema è impossibile se e solo se $\rho(A) \neq \rho(B)$.
 (b) Il sistema ha $\infty^{\#\{\text{variabili}\} - \rho(A)}$ soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(B)$.

Dimostrazione. **(a):** Se il sistema è impossibile, riducendo a scala otteniamo una matrice C , che è data dalla riduzione a scala di A più una colonna. Tale matrice ha una riga della forma $(0, \dots, 0, a)$, $a \neq 0$, dato che il sistema è impossibile. Aggiungendo questa riga e l'ultima colonna ad un qualunque minore della riduzione a scala di A , otteniamo un minore non nullo di C . Il rango di C , che è uguale al rango di B , è quindi diverso dal rango della riduzione a scala di A e quindi di A . Lo stesso ragionamento ripercorso in senso inverso mi dice che se $\rho(A) \neq \rho(B) \Rightarrow$ il sistema è impossibile. **(b):** Se il sistema ha $\infty^{\#\{\text{variabili}\} - \rho(A)}$ soluzioni la riduzione a scala della matrice B ha solo $\rho(A)$ righe non nulle. Data la forma a scala, un minore (di A e di B) dato dalle $\rho(A)$ righe non nulle e da opportune $\rho(A)$ colonne ha determinante non nullo. Dato che tutte le altre righe sono nulle, non posso avere minori in B o A di ordine maggiore e con determinante non nullo. Quindi $\rho(A) = \rho(B)$. Lo stesso ragionamento ripercorso in senso inverso mi dice che se $\rho(A) = \rho(B)$ il sistema ha $\infty^{\#\{\text{variabili}\} - \rho(A)}$ soluzioni.

17. Esempio: applichiamo il teorema di Rouchè-Capelli al sistema

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ bx + y + z = 2 \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$. La matrice associata (completa) è

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Il rango della matrice completa è 2, in quanto il minore $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ha determinante non nullo. Il rango della matrice incompleta è 2 se $\det \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{bmatrix} = a - b \neq 0$ e 1 altrimenti. Quindi.

- Se $a \neq b$, $\rho(\text{completa}) = \rho(\text{incompleta})$ e quindi il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.
 - Se $a = b$, $\rho(\text{completa}) \neq \rho(\text{incompleta})$ e il sistema è quindi impossibile.
18. Determinare il numero di soluzioni dei sistemi negli esercizi 1, 2, 3, 4 mediante il teorema di Rouchè-Capelli.

Complessità

19. Il numero di moltiplicazioni/divisioni di elementi del campo base necessarie per calcolare il determinante di una matrice di ordine n con lo sviluppo di Laplace è $n!$.
20. Il numero di moltiplicazioni/divisioni di elementi del campo necessarie per calcolare il determinante di una matrice di ordine n attraverso una riduzione a scala è dato da un polinomio in n di grado 3.
21. Scrivere il polinomio del punto precedente.
22. Sia $A \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$. Conseriamo $\mathcal{A}$, l'insieme dei minori di ordine t del tipo $M_{\{r_1, \dots, r_t\}, \{c_1, \dots, c_t\}}$ con gli r_i e i c_i crescenti. Determinare la cardinalità di $\mathcal{A}$.
23. Descrivere la complessità del calcolo del rango attraverso la definizione. [Difficile]
24. Descrivere la complessità del calcolo del rango attraverso una riduzione a scala.

Comunicare ogni errore a caboara@dm.unipi.it