

# Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezioni del 13/14 Aprile 2005

## Operazioni Elementari e riduzione di Gauss

1. Siano  $A \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$ ,  $k$  corpo. Allora

- (a) Per ottenere  $B \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$  uguale ad  $A$  ma con la riga  $i$ -esima combinazione lineare secondo  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  delle righe  $1, \dots, n$  basta moltiplicare  $A$  a sinistra per la matrice  $C$ , che è uguale alla matrice identica tranne che per la riga  $i$ -esima, che è  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Esempio: la seconda riga viene sostituita dalla prima più la seconda più due volte la terza riga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Dimostrare usando la definizione di prodotto matriciale

$$(a_{ij}) * (b_{lt}) = (c_{pq}) \text{ dove } c_{pq} = \sum_{w=1}^n a_{pw} b_{wq}$$

- (b) Per ottenere  $B \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$  uguale ad  $A$  ma con le righe  $i, j$  scambiate, basta moltiplicare  $A$  a sinistra per la matrice  $C$  è uguale alla matrice identica tranne che per le righe  $i, j$ -esime, che sono nulle tranne che nelle posizioni  $j, i$ , che valgono 1.

Esempio: scambio della seconda e terza riga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Dimostrare usando il primo passo.

- (c) Per ottenere  $B \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$  uguale ad  $A$  ma con la riga  $i$ -esima moltiplicata per  $\lambda \in k$  basta moltiplicare  $A$  a sinistra per la matrice  $C$ , che è uguale alla matrice identica tranne che per  $c_{ii}$  che vale  $\lambda$   
Esempio: moltiplicazione della terza riga per 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Dimostrare usando il primo passo.

- (d) Se  $a_{ij} = 0$  per  $i < p, j < q$  per annullare le entrate di  $A$  nella  $q$ -esima colonna con indice di riga minore di  $p$  basta moltiplicarla a sinistra per la matrice  $B$  uguale alla matrice identica tranne la  $q$ -esima colonna, che è

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{a_{(p+1)q}}{a_{pq}} \\ \vdots \\ -\frac{a_{nq}}{a_{pq}} \end{bmatrix} \leftarrow \text{indice } p$$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimostrare usando il primo passo.

- (e) Se  $a_{ij} = 0$  per  $i < p, j < q$  per annullare le entrate di  $A$  nella  $q$ -esima colonna con indice di riga minore di  $p$  basta moltiplicarla a sinistra per la matrice  $B$  uguale alla matrice identica tranne che: la  $q$ -esima colonna è

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{indice } p$$

Gli elementi sulla diagonale dopo la posizione  $pq$  sono  $-\frac{a_{pq}}{a_{(p+1)q}}, \dots, -\frac{a_{pq}}{a_{nq}}$

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimostrare usando il primo passo.

2. Sia

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & + & \dots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

un sistema di  $n$  equazioni in  $m$  incognite. Una sua possibile codifica è nella matrice

$$\left( a_{ij} \mid \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \right)$$

Sostituire la riga  $i$ -esima della matrice con una combinazione lineare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ,  $\lambda_i \neq 0$  delle righe della matrice produce una matrice il cui sistema lineare associato è equivalente al sistema iniziale?

Dimostrare con le proprietà delle equazioni.

3. Nel punto precedente, cosa succede se sostituisco ad una riga  $i$  una combinazione di righe con l' $i$ -esimo coefficiente uguale a 0?

Usando sistematicamente le operazioni elementari descritte al punto (1) è possibile ridurre una matrice a forma triangolare superiore. Questo procedimento è noto come metodo di riduzione a scala o di Gauss-Jordan. Con altre opportune operazioni, si può ridurre il sistema a forma diagonale.

4. Esempio: trovare con Gauss le soluzioni in  $\mathbb{R}^3$  del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x - y + 4z = 5 \end{cases}$$

La matrice associata è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Moltiplichiamo a sinistra per

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(equivale a sostituire alla seconda riga la seconda riga meno la prima e alla terza riga la terza riga meno la prima) ed otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Moltiplichiamo a sinistra per

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(equivale a sostituire alla terza riga la terza riga più due volte la seconda) ed otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ 7z = 6 \end{cases}$$

Dalla terza equazione ricaviamo  $z = 6/7$ . Sostituendo nella seconda equazione abbiamo  $y + 12/7 = 1$  da cui  $y = -5/7$ . Sostituendo nella terza equazione abbiamo  $x - 5/7 + 6/7 = 1$  da cui  $x = 6/7$ . L'insieme delle soluzioni è

$$\{(6/7, -5/7, 6/7)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Alternativamente possiamo diagonalizzare completamente la matrice moltiplicandola per la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/7 \\ 0 & 1 & -2/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

risultato

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & -5/7 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

e successivamente per la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 & -5/7 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Rimane da dividere l'ultima riga per 7, cioè moltiplicare il per

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

e otteniamo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6/7 \\ 0 & 1 & 0 & -5/7 \\ 0 & 0 & 1 & 6/7 \end{bmatrix}$$

che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} x = 6/7 \\ y = -5/7 \\ z = 6/7 \end{cases}$$

Esempio: descrivere le soluzioni in  $\mathbb{R}^3$  del sistema

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ bx + y + z = 2 \end{cases}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

La matrice associata è

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Per annullare l'entrata  $(2, 1)$  dobbiamo dividere per  $a$  o per  $b$ . Scegliamo di sostituire alla seconda riga la somma della prima riga e della seconda moltiplicata per  $-\frac{a}{b}$ . Dato che non possiamo dividere per 0 o moltiplicare una riga per 0, spezziamo nei quattro casi

(a)  $a = b = 0$ . La matrice è nella forma  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Risolvere per esercizio.

(b)  $a = 0, b \neq 0$  Scambiando la prima e la seconda riga la matrice è già in forma a scala.  $\begin{bmatrix} b & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Risolvere per esercizio.

(c)  $a \neq 0, b = 0$ . La matrice è già in forma a scala  $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Risolvere per esercizio.

(d)  $a \neq 0, b \neq 0$ : svolgimeto di seguito.

possiamo effettuare l'operazione  $II \rightarrow I - \frac{a}{b}II$ . Il risultato è

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{b-a}{b} & \frac{b-a}{b} & \frac{b-2a}{b} \end{bmatrix}$$

Dato che  $b \neq 0$ , possiamo dividere la seconda riga per  $b$  ( $II \rightarrow \frac{1}{b}II$ ), ottenendo

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & b-a & b-2a \end{bmatrix}$$

La seconda riga mi dà l'equazione

$$(b-a)y + (b-a)z = b-2a$$

Devo dividere i due casi  $a = b$  e  $a \neq b$ .

Se  $a = b$  allora l'equazione diviene  $0 = -a$ , impossibile viste le condizioni  $b \neq 0, a \neq 0$ , e quindi l'equazione è impossibile.

Se  $a \neq b$ , l'equazione diviene  $y = \frac{b-2a}{b-a} - z$ . Sostituiamo nella prima equazione e otteniamo

$$ax + \frac{b-2a}{b-a} - z + z = 1 \Rightarrow ax + \frac{b-2a}{b-a} = 1$$

Da cui

$$ax = 1 - \frac{b-2a}{b-a} = \frac{a}{b-a}$$

Dobbiamo distinguere i due casi  $a = 0$  e  $a \neq 0$ .

Se  $a = 0$ , l'equazione diviene l'identità  $0 = 0$ .

Se  $a \neq 0$ , l'equazione diviene  $x = \frac{1}{b-a}$ .

Riassumiamo i risultati per il caso  $b \neq 0, a \neq 0$ :

$a \neq 0, b \neq 0, a = b$ : sistema impossibile.

$a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$ : ho il sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{b-a} \\ y = \frac{b-2a}{b-a} - z \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni è  $\{(\frac{1}{b-a}, \frac{b-2a}{b-a} - z, z)\} \subset \mathbb{R}^3$

5. Cosa succede se cambio l'ordine delle variabili e risolvo il sistema

$$\begin{cases} y + z + ax = 1 \\ y + z + bx = 2 \end{cases}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ ?

6. Descrivere le soluzioni in  $\mathbb{R}^3$  del sistema

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

dove  $a \in \mathbb{R}$

7. Descrivere le soluzioni in  $\mathbb{Z}_3^3$  del sistema

$$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y + z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

dove  $a \in \mathbb{Z}_3$

8. Data l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\rightsquigarrow (2y + z, x + 3y - 3z, x + ty - z) \end{aligned}$$

trovare una base di  $\text{Ker } \phi$  e una base di  $\Im \phi$ .

9. Data l'applicazione lineare  $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  descritta dalla matrice

$$M_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare una base di  $\text{Ker } \phi$  e una base di  $\Im \phi$ .

10. Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$ . Dimostrare che se una riga di  $A$  viene trasformata nella riga nulla attraverso una riduzione a scala, allora le righe di  $A$  non sono linearmente indipendenti.
11. Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times m}(k)$ . Dimostrare che lo spazio vettoriale generato dalle righe di  $A$  è uguale allo spazio vettoriale generato dalle righe di una riduzione a scala di  $A$ .
12. Dimostrare che il procedimento seguente è corretto:  
 Data  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$ , costruiamo la matrice  $B = [A | I_n]$ . Riduciamo a scala  $B$ .  
 Se  $A$  è invertibile, la matrice ridotta è  $[I_n | A^{-1}]$ .  
 Se  $A$  non è invertibile, la matrice ridotta contiene una riga di zeri.

### Determinante

Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$ . Definiamo  $\det(A)$  mediante una definizione induttiva su  $n$ .

Se  $n = 2$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e  $\det(A) = ad - bc$

Se  $n > 2$ ,  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j})$ , dove  $A_{1j} \in \text{Mat}_{(n-1) \times (n-1)}(k)$  è ottenuta cancellando da  $A$  la prima riga e la  $j$ -esima colonna.

Esempio:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = 0$$

13. Dimostrare che  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \det(I_n) = 1$ .
14. Dimostrare che il determinante di una matrice diagonale è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale.
15. Dimostrare che il determinante di una matrice triangolare superiore è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale.
16. Dimostrare che il determinante di una matrice triangolare inferiore è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale.
17. Dimostrare che se una riga della matrice  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$  è nulla, allora  $\det(A) = 0$ .

Teorema di Binet [Senza dimostrazione]. Siano  $A, B \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$ . Allora

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

18. Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$ . Dimostrare che se  $A^{-1}$  esiste, allora  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ .
19. Dimostrare che la seguente definizione di determinante per  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$  è equivalente a quella data: Se  $n = 2$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  e  $\det(A) = ad - bc$   
 Se  $n > 2$ , sia  $i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ , dove  $A_{ij} \in \text{Mat}_{(n-1) \times (n-1)}(k)$  è ottenuta cancellando da  $A$  la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna.

Esempio di applicazione dell'esercizio precedente:

$$\det \begin{pmatrix} 1, 0, 1, 0 \\ 0, 1, 0, 1 \\ 1, 0, 0, 1 \\ 1, 0, 0, 0 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 0, 1, 0 \\ 1, 0, 1 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} = + \det \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix} = -1$$

Abbiamo sviluppato per la quarta e terza riga rispettivamente.

20. Dimostrare che se una matrice ha due righe uguali, il suo determinante è nullo.
21. Dimostrare che se in una matrice una riga è combinazione lineare delle altre, il determinante della matrice è nullo.



22. Trovare il determinante della matrici associate alle operazioni elementari.
23. Scrivere un algoritmo per il calcolo del determinante mediante la definizione.
24. Scrivere un algoritmo per il calcolo del determinante usando il seguente metodo:

- (a) Ridurre a scala la matrice memorizzando le operazioni elementari usate.
- (b) Dedurre il determinante dalle operazioni elementari usate e dal determinante della matrice a scala.

Confrontare i tempi con l'algoritmo precedente.

Esempio di applicazione dell'algoritmo del punto precedente:  
al punto 3) abbiamo triangularizzato la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

mediante le operazioni elementari

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

E  $\det(E_1) = \det(E_2) = 1$ . Abbiamo quindi  $1E_1A = I_3$ ,  $\det(E_2) \det(E_1) \det(A) = \det(I_3) = 1$  e quindi  $\det(A) = 1$ .

N.B. Abbiamo una matrice  $A$  e la vogliamo ridurre a scala alla matrice triangolare superiore  $B$ . Se vogliamo che il  $\det(A) = \det(B)$ , possiamo in generale usare solo operazioni elementari il cui determinante sia 1. Questa limitazione rende non sempre possibile la riduzione a scala di  $A$ .

25. Calcolare in qualche modo (si suggerisce un sistema di calcolo) il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 & 9 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

26. Dimostrare il seguente teorema:

Sia  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(k)$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (a)  $\det(A) \neq 0$ .
- (b)  $Ax = b$  ha una unica soluzione.
- (c)  $A$  è invertibile.
- (d) L'applicazione lineare associata ad  $A$  è iniettiva.
- (e) L'applicazione lineare associata ad  $A$  è surgettiva.
- (f) La riduzione a diagonale di  $A$  produce  $I_n$ .
- (g) La riduzione a scala di  $A$  non ha righe nulle.

Comunicare ogni errore a [caboara@dm.unipi.it](mailto:caboara@dm.unipi.it)