Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezione del 23 Marzo 2005

Applicazioni lineari

1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Proviamo che se $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente indipendenti, sono base di V.
   Abbiamo la lineare indipendenza, rimane da provare che $v_1, \ldots, v_n$ generano V. Dalla definizione di dimensione, sappiamo che non esistono $n+1$ uple di vettori linearmente indipendenti. Quindi per ogni $v \in V,\ v \neq v_i\ i : 1, \ldots, n$ i vettori $v, v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti. Quindi esistono $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tali che $\alpha v + \sum_i \alpha_i v_i = 0$ e $(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$. Ora, $\alpha = 0$ o $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$, abbiamo che $\sum_i \alpha_i v_i = 0$ e i v_i non sono tutti nulli, ma questo è impossibile perche' i v_i sono linearmente indipendenti. Quindi $\alpha \neq 0$. Ma allora $v = -\sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha} v_i$ e quindi v è combinazione lineare dei v_i, da cui la tesi.

2. Sia
$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & e_1 & \mapsto & e_1 + e_2 \\ & e_2 & \mapsto & 2e_1 - e_2 \end{array}$$
   un applicazione lineare. Provare che ϕ è surgettiva.

   - Primo metodo: usiamo la definizione di surgettivita':
   $$(*) \ \ \forall\ v \in \mathbb{R}^2 \exists\ u \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } \phi(u) = v$$
     La matrice associata a ϕ dalle basi canoniche è
   $$M_f \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
     Il sistema (*) diventa quindi
   $$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \exists\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } M_f \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (a, b)$$

Si trova facilmente che il sistema ha soluzioni $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$ e che quindi ϕ è surgettiva.

- Secondo metodo. Vogliamo dimostrare $\Im\phi = \mathbb{R}^2$ usando l'esercizio precedente. Dalla definizione di ϕ abbiamo che $(1,1),(2,-1) \in \Im\phi \subset \mathbb{R}^2$. $(1,1),(2,-1)$ non sono multipli l'uno dell'altro, e sono quindi linearmente indipendenti. Dato che appartengono a $\mathbb{R}^2$, che ha dimensione 2, formano una base di $\mathbb{R}^2$. Generano quindi $\mathbb{R}^2$, e dato che lo spazio da essi generato è contenuto in $\Im\phi$, abbiamo che $\Im\phi = \mathbb{R}^2$.

3. Sia data l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & e_1 & \mapsto & e_1 + e_2 \\ & e_2 & \mapsto & 2e_1 \end{array}$$

e le tre basi di $\mathbb{R}^2$

- $B_1 = ((1,2),(0,1))$
- $B_2 = ((1,1),(2,0))$
- $B_3 = ((1,2),(2,1))$

Determinare $M^{B_1}_{\phi(E)}$,$M^{B_1}_{\phi(B_2)}$, $M^{B_1}_{\phi(B_3)}$,$M^{B_3}_{\phi(B_1)}$.

Abbiamo $M^{E}_{\phi(E)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dalla definizione di ϕ.

Per avere $M^{B_1}_{\phi(E)}$, dobbiamo conoscere le immagini dei vettori di B_1 secondo la base canonica. Sfruttiamo la linearità di ϕ. Abbiamo

$$\phi(1,2) = \phi(e_1 + 2e_2) = \phi(e_1) + 2\phi(e_2) = (1,1) + 2(2,0) = (5,1)$$

(o se si preferisce usare $M^{E}_{\phi(E)}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$). Analogamente, $\phi(0,1) = \phi(e_2) = (2,0)$. Quindi

$$M^{B_1}_{\phi(E)} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per avere $M^{B_1}_{\phi(B_2)}$, dobbiamo avere $\phi(1,2) = (5,1), \phi(0,1) = (2,0)$ rispetto alla base B_2. Basta risolvere i sistemi

$$\alpha_1(1,1) + \beta_1(2,0) = (5,1)$$
$$\alpha_2(1,1) + \beta_2(2,0) = (2,0)$$

e

$$M^{B_1}_{\phi(B_2)} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}$$

Per avere $M^{B_1}_{\phi(B_3)}$ e $M^{B_3}_{\phi(B_1)}$ si procede in modo analogo.

Matrici

4. Sia A la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
Trovare l'inversa di A.
Stiamo cercando una matrice $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $AX = I_2$. Cioè stiamo cercando le soluzioni del sistema di equazioni
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
vale a dire
$$\begin{cases} x + 3z = 1 \\ 2x + 6z = 0 \\ y + 3t = 1 \\ 2y + 6t = 0 \end{cases}$$
Questo sistema è impossibile e quindi la matrice A non è invertibile.

5. Sia A la matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$$
Trovare l'inversa di A.

6. Sia A la matrice
$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_{11})$$
   - Trovare, se esiste, l'inversa di A in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.
   - Trovare, se esiste, l'inversa di A in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_{11})$.
   - Trovare, se esiste, l'inversa di A in $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_{5})$.

7. Trovare $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tali che $A \neq 0 \neq B$ e $A \cdot B = 0$.

8. Trovare $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $A \neq 0$ e $A^2 = 0$.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Trovare $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 \neq 0$ e $A^3 \neq 0$.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Trovare $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $A^4 \neq 0$ e $A^5 \neq 0$.

11. Trovare $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = I$.

12. Trovare tuttle le soluzioni dell'equalizone matriciale $X(X - I_2) = 0$ con $X \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $I_2 \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matrice identica.

13. Sia data la matrice

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Provare che $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ M_n non è nilpotente.

14. Sia data la matrice

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$$

Provare che $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ M_n non è nilpotente.

15. Siano

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

matrici in $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Trovare $X \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $X \cdot M_1 = M_2$.

16. Siano

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & 9 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

matrici in $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Trovare $X \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $M_1 \cdot X = M_2$.

17. Siano

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \end{bmatrix}$$

matrici in $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Trovare $X \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che $X \cdot M_1 = M_2$.

Quozienti

18. L'anello $\mathbb{Q}[x]/(x^2+1)$ contiene 0-divisori? Nilpotenti? E' un corpo?

19. L'anello $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1)$ contiene 0-divisori? Nilpotenti? E' un corpo? Dato che $\overline{(x+1)(x-1)} = \overline{0}$, abbiamo zero-divisori e quindi $\mathbb{Q}[x]/(x^2-1)$ non è un corpo. Per avere nilpotenti, dovremmo avere che esiste $n \in \mathbb{N} - 0, 1, \overline{f(x)} \in \mathbb{Q}[x]/(x^2-1)$ tale che $\overline{f(x)}^n = \overline{0}$, cioè che esiste $n \in \mathbb{N} - 0, 1, f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che esista $h(x) \in \mathbb{Q}[xx]$ tale che $f(x)^n = (x^2-1)h(x) = (x+1)(x-1)h(x)$. Per il teorema della fattorizzazione unica, questo e' impossibile, dato che a destra del segno di uguaglianza abbiamo dei fattori con esponente 1 e a sinistra no.

20. L'anello $\mathbb{Q}[x]/(x^2)$ contiene 0-divisori? Nilpotenti? E' un corpo?

21. L'anello $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+1)$ contiene 0-divisori? Nilpotenti? E' un corpo?

22. L'anello $\mathbb{Z}_5[x]/(x^4+x^3+x^2+x+1)$ contiene 0-divisori? Nilpotenti? E' un corpo?

23. L'anello $\mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x)$ è uno $\mathbb{Z}_5$ spazio vettoriale? Se si, trovare una base. Verificare che $\mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x)$ sia uno $\mathbb{Z}_5$ spazio vettoriale con le operazioni

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x) \times \mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x) \\ \overline{f}, \overline{g} & \rightsquigarrow & \overline{f+g} \end{array}$$

e

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x) \\ \lambda, \overline{g} & \rightsquigarrow & \overline{\lambda g} \end{array}$$

è triviale. Una base è $(\overline{1}, \overline{x}, \overline{x^2}, \overline{x^3})$.

Generazione: ogni elemento di $\mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x)$ può essere scritto come $\overline{a+bx+cx^2+dx^3}$ per qualche $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_5$, dato che $\overline{x^4} = \overline{x}$.

Lineare indipendenza: Dobbiamo dimostrare che $\overline{a+bx+cx^2+dx^3} = \overline{0}$ ha solo la soluzione nulla. Infatti

$$\begin{array}{l} \overline{a+bx+cx^2+dx^3} = \overline{0} \in \mathbb{Z}_5[x]/(x^4-x) \\ \Updownarrow \\ a+bx+cx^2+dx^3 = h(x)(x^4-x) \in \mathbb{Z}_5[x] \end{array}$$

ma quest'ultima uguaglianza può valere se e solo se $a = b = c = d = 0 = h(x)$ per ragioni di grado.

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`