Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezione del 17 Marzo 2005

Basi

1. Sia $v = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. Siano dati i set di vettori
   - $B = \{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$
   - $C = \{(1, 1, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$
   - $D = \{(2, 1, 0), (1, 2, 5), (1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$
   - $E = \{(2, 1, 0), (1, 2, 5), (3, 3, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$
   - $F = \{(2, 1, 0), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$

   Per ogni set, trovare se possibile una combinazione lineare dei vettori del set che dia v.

2. Nell'esercizio precedente, determinare quali dei set $B \dots E$ Siano basi di $\mathbb{R}^3$. Per ogni base K, determinare le coordinate di v in K.

3. Sia (u_1, u_2) una base di $\mathbb{R}^2$. I vettori $u_1 + u_2, u_1 - u_2$ formano una base di $\mathbb{R}^2$?
   Indipendenza lineare: Il sistema

   $$a(u_1 * u_2) + b(u_1 - u_2) = 0$$

   ammette solo $a = b = 0$ come soluzione $\Leftrightarrow$ $u_1 + u_2, u_1 - u_2$ sono linearmente indipendenti. Raccogliendo u_1, u_2 il sistema diviene

   $$(a + b)u_1 + (a - b)u_2 = 0$$

   Dato che u_1, u_2 sono base, sono anche linearmente indipendenti, e $0, 0$ è l' unica soluzione del sistema precedente Abbiamo quindi

   $$\begin{array}{rcl} a + b & = & 0 \\ a - b & = & 0 \end{array}$$

   Da cui $a = b = 0$ e quindi la tesi.

4. Siano $(1,2,0),(0,0,\lambda),(1,\lambda,0)$ vettori di $\mathbb{Q}^3$, con $\lambda \in \mathbb{Q}$. Trovare i valori di λ, se ne esistono, per cui i tre vettori formano una base di $\mathbb{Q}^3$.

5. Sia $v = e_1 + 3e_2 - e_3 \in \mathbb{R}^3$. Trovare una base B rispetto a cui v abbia coordianate $(1,1,1)$.

6. Sia $v = e_1 + 3e_2 - e_3 \in \mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate di v rispetto alla base $B = \{(1,2,1),(0,1,1),(0,0,3)\}$.

7. Siano $v_1 = (1,0,0), v_2 = (2,1,0), v_3 = (1,1,1)$ vettori formanti la base A di $\mathbb{R}^3$. Sia $v = v_1 + v_2 - 2v_3 \in \mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate di v rispetto alla base $B = \{(1,2,1),(0,1,1),(0,0,3)\}$.

8. Lo spazio vettoriale $\mathbb{Q}[x]$ ha una base finita?

9. Sia V lo spazio vettoriale $\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$. L'insieme delle funzioni polinomiali P è un suo sottospazio proprio?

10. Dare una base di P dell'esercizio precedente.

11. Esiste una base finita dello spazio vettoriale $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$?

12. Esiste una base numerabile dello spazio vettoriale $V = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$?

Applicazioni lineari

13. Abbiamo la funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_5^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_5^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y-1) \end{array}$$

f è un applicazione lineare?
No, infatti $f(0,0) \neq (0,0)$, mentre per un'applicazione lineare deve valere l'uguaglianza.

14. Abbiamo la funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_5^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_5^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x^2) \end{array}$$

f è un applicazione lineare?
No. Trovare un controesempio.

15. Abbiamo la funzione

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_5^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_5^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

f è un applicazione lineare?
Applichiamo la definizione. Dobbiamo avere che

$$f(a(x_1, x_2) + b(y_1, y_2)) = af(x_1, x_2) + bf(y_1, y_2) \ \forall \ x_i, y_i, a, b \in \mathbb{Z}_5$$

Il primo membro, sviluppando i conti, è

$$f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2) = (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, ax_1 + by_1 - (ax_2 + by_2))$$

Il secondo membro, sviluppando i conti, è

$$a(x_1 + x_2, x_1 - x_2) + b(y_1 + y_2, y_1 - y_2)$$

Svolgendo i calcoli, si vede che queste due espressioni sono uguali $\forall \ x_i, y_i, a, b \in \mathbb{Z}_5$

16. Abbiamo la funzione

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Z}_5^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_5^2 \\ & (x, y) & \mapsto & (x + y, x^5 - y) \end{array}$$

f è un applicazione lineare?
Si, infatti come funzione questa è eguale all'applicazione definita nell'esercizio precedente per il piccolo teorema di Fermat $x^p = x \ \forall \ x \in \mathbb{Z}_p, p$ primo.

17. Abbiamo la funzione

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & e_1 & \mapsto & (1, 1) \\ & e_2 & \mapsto & (1, 2) \\ & e_3 & \mapsto & (1, 3) \end{array}$$

Dire se f é iniettiva e/o surgettiva.
Iniettività: f iniettiva $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0\} = (0)$. Determiniamo tutti i vettori di $\operatorname{Ker} f$. M_f la matrice associata a f secondo la base canonica è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

I vettori di $\operatorname{Ker} f$ sono, per definizione, le soluzioni di

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

Da cui

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x + 2y + 3z & = & 0 \end{array}$$

Da cui

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ y + 2z & = & 0 \end{array}$$

Da cui

$$\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& -2z \end{array}$$

Quindi le soluzioni del sistema sono tutti i vettori del tipo $(z, -2z, z) \in \mathbb{R}^3$, e $\operatorname{Ker} f = \{(t, -2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Per esempio, $(1, -2, 1) \in \operatorname{Ker} f$. Quindi $\operatorname{Ker} f \neq (0)$ e f non è iniettiva.
Determinare se f è surgettiva per esercizio.

18. Abbiamo la funzione

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & e_1 & \mapsto & (1,1,1) \\ & e_2 & \mapsto & (0,1,0) \\ & e_1+e_2 & \mapsto & (\lambda,2,1) \end{array}$$

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ f è un applicazione lineare?
Deve essere che $f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2)$. Quindi

$$(\lambda, 2, 1) = (1, 1, 1) + (0, 1, 0) = (1, 2, 1)$$

da cui deduciamo $\lambda = 1 \Leftrightarrow f$ è lineare.

19. Sia $f\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una funzione lineare tale che $e_1 \mapsto (1, 1)$.
   - f può essere iniettiva?
   - f può essere surgettiva?
   - f può essere tale che $\operatorname{Im} f = (1, 1)$?
   - f può essere tale che $\operatorname{Ker} f = (1, 1)$.

20. Abbiamo la funzione

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & e_1 & \mapsto & (1,2,0) \\ & e_2 & \mapsto & (0,1,0) \\ & e_3 & \mapsto & (0,1,2) \end{array}$$

Determinare $\operatorname{Ker} f, \operatorname{Im} f$.

21. Abbiamo le funzioni lineari

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & e_1 & \mapsto & e_2 \\ & e_2 & \mapsto & e_1 \\ & e_3 & \mapsto & e_1+e_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} h: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & e_1 & \mapsto & e_1 \\ & e_2 & \mapsto & e_3 \\ & e_3 & \mapsto & e_2 \end{array}$$

Trovare se esiste $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ lineare tale che $g \circ f = h$.

22. Nello spazio vettoriale $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ abbiamo le funzioni

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ e_1 & \mapsto & e_1 \\ e_2 & \mapsto & e_2 \end{array}, \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ e_1 & \mapsto & e_1 + e_2 \\ e_2 & \mapsto & 0 \end{array}, \quad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ e_1 & \mapsto & e_1 + e_2 \\ e_2 & \mapsto & e_1 \end{array}$$

Le funzioni f, g, h sono linearmente indipendenti? Sono base di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$?
Troviamo innanzitutto le matrici associate a f, g, h

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, M_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lineare indipendenza: dobbiamo avere che l'unica soluzione del sistema $aM_f + bM_g + cM_h = 0$ sia $a = b = c = 0$. Il sistema si può scrivere

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ c & c \end{bmatrix} = 0$$

Cioè

$$\begin{bmatrix} a+b+c & 0 \\ b+c & a+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a+b+c & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ b+c & = & 0 \\ a+c & = & 0 \end{cases}$$

Da cui $a = b = c = 0$. Quindi f, g, h sono linearmente indipendenti.
Generazione: La funzione associata alla matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Non può essere data da una combinazione lineare di f, g, h. [Perche?]. Quindi f, g, h non sono una base di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

23. Sia $V = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \mid M_f = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & b & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$. V è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$?

24. Sia $V = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) \mid M_f = \begin{bmatrix} a & a & b \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{R}\}$. V è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$?

25. Trovare una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{Ker}\, f = ((1, 2))$ e $\mathrm{Im}\, f = ((1, 1))$.

26. Trovare una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che f sia iniettiva e $f(1, 1) = (1, 1, 1)$.

27. Esiste una funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che f sia iniettiva e $\mathrm{Im}\, f = ((1, 1))$?

28. Trovare una funzione lineare $f : \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ che sia iniettiva e per cui $f(e_{11}) = e_{11}$.

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`