Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezione del 10 Marzo 2005

Fattori e radici di polinomi

1. Trovare i fattori su $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomio x^2+2.
   Questo polinomio è somma di due quadrati in $\mathbb{R}[x]$, quindi non ha radici su $\mathbb{R}$, tantomeno su $\mathbb{Q}$. Per essere riducibile, deve essere il prodotto di due polinomi di primo grado, quindi avere radici. Il polinomio è quindi irriducibile.

2. Trovare i fattori su $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomio x^2+2.
   Questo polinomio è somma di due quadrati in $\mathbb{R}[x]$, quindi non ha radici su $\mathbb{R}$, tantomeno su $\mathbb{Q}$. Per essere riducibile, deve essere il prodotto di due polinomi di primo grado, quindi avere radici. Il polinomio è quindi irriducibile.

3. Trovare i fattori su $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomio x^2-2.
   Il polinomio può essere irriducibile o avere due fattori lineari. Usando la formula delle equazioni di secondo grado, $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$ in $\mathbb{R}[x]$. Se il polinomio fosse fattorizzabile in $\mathbb{Q}[x]$ dovrebbe avere la stessa fattorizzazione, il che è impossibile dato che $x+\sqrt{2}$ e $x-\sqrt{2}$ non appartengono a $\mathbb{Q}[x]$.

4. Trovare i fattori su $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomio x^7+3.
   Usiamo il criterio di Eisenstein con $p=2$. Abbiamo che $2 \nmid 1 = a_7$, $2 \mid 2 = a_0$ e $2^2 = 4 \nmid 2 = a_0$. Il polinomio è quindi irriducibile.

5. Trovare i fattori su $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomio x^4-16.
   $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)=(x^2+2)(x+2)(x-2)$ e x^2+4 è irriducibile sui razionali per quanto visto prima.

6. Trovare i fattori su $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomio x^4+4.
   Il polinomio è somma di quadrati, e non ha radici in $\mathbb{R}$, tanto meno in $\mathbb{Q}$. Una fattorizzazione deve quindi essere composta di due fattori di grado 2. Si propongono tre metodi per trovarla effettivamente

- $(x^4 + 4) = (x^2 + 2i)(x^2 - 2i)$ è una parziale fattorizzazione su $\mathbb{C}[x]$. Per esercizio, fattorizzare i due polinomi di secondo grado, ottenere quattro fattori lineari e trovare due coppie distinte di fattori lineari il prodotto dei cui polinomi sia in $\mathbb{Q}[x]$. Questi due prodotti danno una fattorizzazione in $\mathbb{Q}[x]$.
- Possiamo trovare direttamente i fattori lineari in $\mathbb{C}[x]$ calcolando le radici quarte di -4 in $\mathbb{C}$. Infatti $x^4 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-4}$. Dato che $-4 = 4e^{i\pi}$, usando la formula

  $$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{\theta+2k\pi}{n} i} \; k : 0 \ldots n-1$$

  otteniamo le quattro radici $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Portandole in forma trigonometrica e poi cartesiana attravero la formula $\rho e^{i\theta} = \rho(cos\theta + i \sin\theta)$, otteniamo le forme cartesiane $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ e $1 - i$ rispettivamente. Abbiamo quindi

  $$x^4 + 4 = (x - (1 + i))(x - (-1 + i))(x - (-1 - i))(x - (1 - i))$$

  in $\mathbb{C}[x]$. Cerchiamo ora coppie di fattori che diano come prodotto un polinomio in $\mathbb{Q}[x]$. Notiamo che il prodotto della prima e della quarta radice è $x^2 + 2x + 2$, e il prodotto della seconda e della terza radice è $x^2 - 2x + 2$. Questi due polinomi appartengono a $\mathbb{Q}[x]$ e costituiscono una fattorizzazione (in $\mathbb{Q}[x]$) di $x^4 + 4$.
- Per il lemma di Gauss, possiamo supporre che i fattori di x^4+4 siano polinomi monici a coefficenti interi. Ci siamo quindi ridotti a cercare due polinomi $x^2 + ax + b$, $x^2 + Ax + B \in \mathbb{Z}[x]$ tali che

  $$x^4+4 = (x^2+ax+b)(x^2+Ax+B) = x^4+(A+a)x^3+(aA+B+b)x^2+(bA+aB)x+bB$$

  Per il pricipio di identità dei polinomi, l'equazione precedente ẽ equivalente al sistema di equazioni diofanteee

  $$\begin{array}{lrcl} \text{(Grado 0)} & 4 & = & bB \\ \text{(Grado 1)} & 0 & = & bA + aB \\ \text{(Grado 2)} & 0 & = & aA + B + b \\ \text{(Grado 3)} & 0 & = & A + a \\ \text{(Grado 0)} & 1 & = & 1 \end{array}$$

  Dalla prima equazione deduciamo che ci possono essere solo quattro possibili valori per la coppia di variabili (b, B), e cioè $(2, 2)$, $(-2, -2)$,$(1, 4)$ e $(-1, -4)$. Dobbiamo provare a sostituire fino a quando non abbiamo ottenuto una soluzione (una fattorizzazione di $x^4 + 4$) o abbiamo provato che non esistono soluzioni ($x^4 + 4$ risulta irriducibile).
  Iniziamo con $b = B = 2$. Il sistema diviene

  $$\begin{array}{rcl} 4 & = & 4 \\ 0 & = & A + a \\ 0 & = & aA + 4 \\ 0 & = & A + a \\ 1 & = & 1 \end{array}$$

da cui

$$\begin{aligned} 0 &= aA + 4 \\ 0 &= A + a \end{aligned}$$

che ha due soluzioni, $a = 2, A = -2$ e $a = -2, A = 2$, che sono equivalenti per i nostri scopi. Scegliamo $a = 2, A = -2$. Il sistema iniziale ammette quindi soluzione $a = 2, A = -2, b = 2, B = 2$ e quindi

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

7. Fattorizzare il polinomio $t^3 + 2t + 10 \in \mathbb{Q}[t]$.
   Testiamo il criterio di Eisenstein con $p = 2$. Abbiamo $2 \nmid 1 = a_3$, $2 \mid 2$ e $2 \mid 10$ ma $2^2 = 4 \nmid 10$, quindi il polinomio è irriducibile.

8. Fattorizzare su $\mathbb{Q}[x]$ e poi su $\mathbb{C}[x]$ il polinomio $x^8 - 1$.

9. Fattorizzare il polinomio $f(t) = 3t^3 + t - 5 \in \mathbb{Q}[t]$.
   Dato che il polinomio ha grado 3, se non è irriducibile deve avere una radice razionale. Se una radice razionale esiste, deve appartenere all'insieme

   $$\left\{\frac{\text{divisori di } a_0}{\text{divisori di } a_n}\right\} = \left\{\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{1}, \pm\frac{5}{3}\right\} = A$$

   Notiamo che i numeri negativi in A non possono essere radici di $f(t)$. Testando i quattro numeri positivi, abbiamo $f(1) \neq 0$, $f(\frac{1}{3}) \neq 0$, $f(5) \neq 0$ e $f(\frac{5}{3}) \neq 0$. Il nostro polinomio non ha quindi radici razionali ed è quindi irriducibile.

10. Fattorizzare il polinomio $f(x) = x^3 - 7x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$.

    - Primo metodo. Notiamo che $f(1) = 0$, quindi $(x - 1) \mid f(x)$. Troviamo $f(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)$ con la divisione di polinomi. Il polinomio $x^2 + x - 6$ è di secondo grado, e si può quindi fattorizzare con l'ausilio delle formula per le equazioni di secondo grado. Applicandola, otteniamo $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Quindi

      $$x^3 - 7x + 6 = (x - 2)(x - 1)(x + 3)$$

    - Secondo Metodo. Le possibili radici di $f(x)$ in $\mathbb{Q}$ sono $\{\pm1, \pm2, \pm3\}$. Abbiamo che $f(1) = f(2) = f(-3) = 0$,$f(-1) \neq 0$,$f(-2) \neq 0$,$f(-3) \neq 0$. Quindi $(x - 1) \mid f(x)$, $(x - 2) \mid f(x)$ e $(x + 3) \mid f(x)$. Il polinomio è monico e quindi

      $$f(x) = (x - 2)(x - 1)(x + 3)$$

11. Fattorizzare il polinomio $f(x) = 4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 10x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$.
    $f(x) = 2(2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3) = 2g(x)$. Le possibili radici di $g(x)$ in $\mathbb{Q}$

sono $\{\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\}$. Abbiamo che $f(\pm 1) \neq 0$,$f(3) \neq 0$ ma $f(3) = 0$. Quindi $(x-3) \mid g(x)$ e dalla divisione di polinomi otteniamo

$$g(x) = (x-3)(2x^3 + x^2 + 2x + 1) = (x-3)h(x)$$

Le possibili radici di $h(x)$ in $\mathbb{Q}$ sono $\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\}$. Abbiamo già visto che ± 1 non sono radici di $g(x)$, e non possono essere quindi radici di $h(x)$, un suo fattore. Abbiamo che $f(-\frac{1}{2}) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) \neq 0$, quindi $(2x+1) \mid h(x)$. Dalla divisione di polinomi otteniamo $h(x) = (2x+1)(x^2+1)$. Dato che x^2+1 è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$, la fattorizzazione di $f(x)$ è $2(2x+1)(x-3)(x^2+1)$.

12. Siano $a, b \in K$ e $f(x) \in K[x]$. È vero che $f(x)$ è riducibile se e solo se $f(ax+b)$ è riducibile.

13. Usare l'esercizio precedente per dimostrare che, per ogni $p \in \mathbb{N}$, primo, il polinomio $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ è irriducibile.
    Suggerimento: $f(x) = \frac{x^p - 1}{x-1}$. Attuare la sostituzione $u = x - 1$. e usare poi il criterio di Eisenstein.

14. Dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

15. Dimostrare che nessuna radice settima di 2 appartiene a $\mathbb{Q}$.

16. Dimostrare che solo due radici ottave di 2 appartengono a $\mathbb{R}$.

17. Fattorizzare $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]\ \forall\ p \in \mathbb{N}$ primo.

18. Trovare una fattorizzazione di $x^{999} - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ mediante un sistema di calcolo.

19. Senza fattorizzarlo esplicitamente ma usando il risultato dell'esercizio precedente, $x^{999} - 1 \in \mathbb{Z}_{101}[x]$ è irriducibile?

20. Trovare una fattorizzazione di $x^{999} - 1 \in \mathbb{Z}_{101}[x]$ mediante un sistema di calcolo.

Spazi vettoriali

21. Sia $A = \{\text{Mele}\}$, $B = \{\text{Pere}\}$ e $V = A \times B$. Definiamo le due operazioni

$$\begin{array}{cccc} + : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & ((n_1 \text{ mele}, m_1 \text{ pere}), (n_2 \text{ mele}, m_2 \text{ pere})) & \mapsto & (n_1 + n_2 \text{ mele}, m_1 + m_2 \text{ pere}) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & k \times V & \longrightarrow & V \\ & (\lambda, (n \text{ mele}, m \text{ pere})) & \mapsto & (\lambda n \text{ mele}, \lambda m \text{ mele}) \end{array}$$

- Se $k = \mathbb{Z}$, $(V, +, \cdot)$ è uno $\mathbb{Z}$ spazio vettoriale?

- Se $k = \mathbb{Q}$, $(V, +, \cdot)$ è un $\mathbb{Q}$ spazio vettoriale?

22. Sia $A = \{\{(a, 0 \nmid a \in \mathbb{R}, 0 \leq a \leq b)\}b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, cioè l'insieme dei segmenti sull'asse delle ascisse con origine $(0,0)$. $B = \{$circonferenze di centro l'origine $\subset \mathbb{R}^2\}$ e $V = \mathcal{P}(A \cup B)$. Definiamo le due operazioni

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (C, D) & \mapsto & C \cup D \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\lambda, \text{circonferenza}) & \mapsto & \text{circonferenza dilatata di } \lambda \\ & (\lambda, \text{segmento}) & \mapsto & \text{circonferenza allungato a destra di } \lambda \end{array}$$

   - la definizione di cui sopra è una buona definizione di $(V, +, \cdot)$ come $\mathbb{R}$ spazio vettoriale?
   - In caso di risposta negativa alla prima domanda, modificare V e/o le operazioni per ottenere uno spazio vettoriale.

23. $\mathbb{Q}[x]_{=3} = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid \text{grado di } f(x) = 3\}$ è un $\mathbb{Q}$ spazio vettoriale?
No, infatti $x^3 \in \mathbb{Q}[x]_{=3}$, $x^3 + x \in \mathbb{Q}[x]_{=3}$ ma $x^3 - (x^3 + x) = -x \notin \mathbb{Q}[x]_{=3}$

24. Sia $V = \{(x, p(x)) | p(x) \in \mathbb{R}[x]\} \subset \mathbb{R}^2$. Per quali $p(x)$ V è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale?
p deve essere lineare omogeneo.

25. Sia $V = \{(t, t, t) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. V è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale?

26. Sia $V = \{(t, t, t^2) | t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. V è un $\mathbb{R}$ spazio vettoriale?

27. Sia $V = \{(t, t, t^2) | t \in \mathbb{Z}_2\} \subset \mathbb{Z}_2^3$. V è uno $\mathbb{Z}_2$ spazio vettoriale?

28. Sia $V = ((1, 0, 2), (2, 0, 0))$ = spazio generato dai vettori $(1, 0, 2), (2, 0, 0)$ e $W = ((1, 0, 0), (0, 0, 1))$. $V = W$?

Abbiamo i generatori dei due spazi, possiamo quindi dimostrare $V \subset W$ provando $(1, 0, 2) \in W, (2, 0, 0) \in W$ e $W \subset V$ provando $(1, 0, 0) \in V, (0, 0, 1) \in V$; queste due inclusioni danno la tesi.

   - $(1, 0, 2) \in W$. W è per definizione l'insieme dei vettori generati da $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$; $(1, 0, 2) = 1 \cdot (1, 0, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1)$, quindi $(1, 0, 2) \in W$.
   - $(2, 0, 0) \in W$. Procedimento analogo.
   - $(1, 0, 0) \in V$. Troviamo la combinazione lineare di $(1, 0, 2), (2, 0, 0)$ che dà $(1, 0, 0)$ attraverso la risouzione di un sistema lineare. $\lambda(1, 0, 2) + \mu(2, 0, 0) = (1, 0, 0)$ da cui

$$\begin{array}{rcl} \lambda + 2\mu & = & 1 \\ 0 & = & 0 \\ 2\lambda & = & 0 \end{array}$$

   da cui $\lambda = 0, \mu = \frac{1}{2}$.

- $(0,0,1) \in V$. Procedimento analogo.

29. I vettori $(1,0,2),(2,0,0)$ sono una base dello spazio che generano?
La generazione è ovvia, rimane da dimostrare l'indipendenza lineare. Vogliamo provare che la sola soluzione del sistema
$$\lambda(1,0,2)+\mu(2,0,0)=0$$
è $\lambda=0,\mu=0$. Il sistema si può scrivere come
$$\begin{aligned}&\lambda+2\mu=0\\&2\lambda=0\end{aligned}$$
Da questo si ricava la tesi.

30. $V=((1,0,2),(2,0,0))=\mathbb{R}^3$?
No.

31. I vettori $(2,7),(-1,3)\in\mathbb{Z}_{11}$ sono linearmente indipendenti?

32. I vettori $(2,7),(-1,3)\in\mathbb{Z}_{13}$ sono linearmente indipendenti?

33. Sia $V=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\}$ e
$$\begin{array}{rccc}+: & V\times V & \longrightarrow & V\\ & (f,g) & \mapsto & f+g\end{array}$$
Dove $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$
$$\begin{array}{rccc}\cdot: & \mathbb{R}\times V & \longrightarrow & V\\ & (\lambda,f) & \mapsto & \lambda g\end{array}$$
Dove $(\lambda g)(x)=\lambda g(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$
    - Dimostrare che $(V,+,\cdot)$ è uno spazio vettoriale.
    - Dimostrare che i vettori $\sin^2 x,\cos^2 x,1$ appartenenti a V sono linearmente dipendenti.
    Sappiamo dalla trigonometria elementare che $\sin^2 x+\cos^2 x=1\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Quindi $\sin^2 x+\cos^2 x-1\equiv 0$ come funzioni sui reali. Quindi $1,1,1$ è una soluzione di $\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x+\gamma(-1)\equiv 0$ diversa da $0,0,0$. I tre vettori sono quindi linearmente dipendenti.
    - Dimostrare che i vettori $\sin x,\cos x$ appartenenti a V sono linearmente indipendenti.
    Suggerimento: Devo provare che $\nexists\ \lambda,\mu$ non nulli tali che
    $$\lambda\sin x+\mu\cos x=0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`