Esercizi Algebra, Informatica, corso A

Massimo Caboara

Lezione del 17 Febbraio 2005

Polinomi

1. Trovare $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$ tali che $f = g$ come funzioni ma $f \neq g$ come polinomi.
   x^2, x

2. È possibile trovare $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $f = g$ come funzioni ma $f \neq g$ come polinomi?
   [No. Hint per la dimostrazione: usare l'algoritmo euclideo]

3. Provare che $\forall\ p \in \mathbb{Z}$, p primo, esistono $f, g \in \mathbb{Z}_p[x]$ tali che $f = g$ come funzioni ma $f \neq g$ come polinomi.
   x^p, x

4. Trovare $f, g \in \mathbb{Z}_5[x]$ tali che $f = g$ come funzioni, $f \neq g$ come polinomi e di grado ambedure > 5.

5. Dato $f = x^5 - x^4 - 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$, trovare $g \in \mathbb{Z}_5[x]$ di grado più basso ma equivalente come funzione.

6. Risolvere l'equazione $x^6 + x^2 + x = 0$ nella variabile x su $\mathbb{Z}_3$.

   Dato che $x^3 = x$ come funzioni in $\mathbb{Z}_3[x]$, l'equazione si può ricondurre a $x^2 + x^2 + x = 0$ da cui $x(2x + 1) = 0$ Provando per $0, 1, 2 \in \mathbb{Z}_3$, vediamo che le soluzione sono $0, 1$. Provare ad applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado. Qual'è il risultato? Il procedimento ha senso?

7. Sia $p(x) \in k[x]$, k corpo. Dimostrare che $p(x)$ è invertibile se e solo se il grado di $p(x)$ è uguale a zero.

8. Trovare in $\mathbb{Z}_4[x]$ uno zero divisore, un nilpontente ed un invertibile di grado ≥ 1.
   $2x$, $2x + 2$, $2x + 1$.

9. La formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado vale su $\mathbb{Z}_p$?

Algoritmo Euclideo

10. Attraverso l'algoritmo euclideo troviamo il GCD di due polinomi. Siano $f = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3-6x^2+11x-6$ e $g = (x-2)(x-4) = x^2-6x+8$ due polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Vogliamo trovare $GCD(f,g) = (f,g)$.

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= x(x^2 - 6x + 8) + 3x - 6 \\ x^2 - 6x + 8 &= \frac{1}{3}(x-4)(3x-6) + 0 \end{aligned}$$

Quindi $(f,g) = 3x - 6$. Ricordiamo che il GCD è unico a meno di un elemento invertibile i.e. 3. Infatti anche $x - 2$ è GCD di f, g.

11. Siano $f(x) = x^5+1,\ g(x) = x^2+1$ polinomi di $\mathbb{Q}[x]$. Calcolare $MCD(f(x), g(x)) = (f(x), g(x))$.

12. Siano $f(x) = x^5+1,\ g(x) = x^2+1$ polinomi di $\mathbb{Z}_2[x]$. Calcolare $MCD(f(x), g(x)) = (f(x), g(x))$.

13. Siano $f(x) = x^5+1,\ g(x) = x^2+1$ polinomi di $\mathbb{Z}_2[x]$. Trovare $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ tali che $a(x)f(x) + b(x)g(x) = (f(x), g(x))$.

14. In $\mathbb{Q}[x]$ voglio risolvere l'equazione

$$f(x)(x+1)^2 + g(x)(x^2-1) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$$

Usiamo l'algoritmo euclideo esteso.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^2+2x+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^2-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^2-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(x+1)\begin{pmatrix} 2x+2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $((x+1)^2, (x^2-1)) = x + 1$. Dato che $2x + 2$ divide $x^2 + 3x + 2$ l'equazione ha soluzioni. Da $\begin{pmatrix} 2x+2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ troviamo le soluzioni dell'equazione al GCD, $f'(x)(x+1)^2+g'(x)(x^2-1) = x+1$. Esse sono $\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}, g'(x) = -\frac{1}{2}}$. Moltiplicando per il termine noto diviso in GCD (vale a dire $x + 2$) otteniamo la soluzione particolare

$$\boxed{f''(x) = \frac{1}{2}(x+2), \quad g''(x) = -\frac{1}{2}(x+2)}$$

Cerchiamo le soluzioni dell'omogenea associata

$$f'''(x)(x+1)^2 + g'''(x)(x^2-1) = 0$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} f'''(x)(x+1)^2 + g'''(x)(x^2-1) &= 0 \\ f'''(x)(x+1)^2 + g'''(x)(x+1)(x-1) &= 0 \\ f'''(x)(x+1) + g'''(x)(x-1) &= 0 \quad [x+1 \text{ è diverso da 0 come polinomio}] \\ f'''(x)(x+1) &= -g'''(x)(x-1) \end{aligned}$$

Quindi $x-1$ divide $f'''(x)(x+1)$. Dato che $x+1$ è irriducibile, $x-1$ divide $f'''(x)$; quindi $\boxed{f'''(x) = k(x)(x-1)}$ con $k(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Allora $\boxed{g'''(x) = -k(x)(x+1)}$.

La soluzione completa è quindi

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}(x+2) + k(x)(x-1), \quad g(x) = -\frac{1}{2}(x+2) - k(x)(x+1)}$$

Verifichiamo, ed effettivamente

$$(\frac{1}{2}(x+2)+k(x)(x-1))(x+1)^2 - (\frac{1}{2}(x+2)+k(x)(x+1))(x^2-1) = x^2+3x+2 \; \forall \, k(x)$$

15. In $\mathbb{Z}_3[x]$ voglio risolvere l'equazione

$$f(x)(x+1)^2 + g(x)(x^2+1) = x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$$

Usiamo l'algoritmo euclideo esteso.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x^2+2x+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x^2+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x^2+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}x \begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{x}{2} \\ \frac{1}{2}x+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $((x+1)^2, (x^2-1)) = 1$ [Perchè?]. Dato che 1 divide x^2+3x+2 l'equazione ha soluzioni. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}x \\ \frac{x+2}{2} \end{pmatrix}$ troviamo le soluzioni dell'equazione

al GCD, $f'(x)(x+1)^2+g'(x)(x^2-1)=1$. Esse sono $\boxed{f'(x)=-\frac{1}{2}x, g'(x)=\frac{x+2}{2}}$.
Moltiplicando per il termine noto diviso in GCD (vale a dire x^2+3x+2) otteniamo la soluzione particolare

$$\boxed{f''(x)=-\frac{1}{2}x(x^2+3x+2), \quad g''(x)=\frac{x+2}{2}(x^2+3x+2)}$$

Cerchiamo le soluzioni dell'omogenea associata

$$f'''(x)(x+1)^2+g'''(x)(x^2+1)=0$$

Dato che $(x+1)^2$ e x^2+1 sono coprimi abbiamo $\boxed{f'''(x)=k(x)(x^2+1)}$ $\boxed{g'''(x)=-k(x)(x+1)^2}$. con $k(x)\in\mathbb{Z}_3[x]$.

La soluzione completa è quindi

$$\boxed{f(x)=-\frac{1}{2}x(x^2+3x+2)+k(x)(x^2+1), \quad g(x)=\frac{x+2}{2}(x^2+3x+2)-k(x)(x+1)^2}$$

Verificare!

Esercizi proposti

16. Dimostrare se possibile la formula delle equazioni di secondo grado per $\mathbb{Z}_p$.
17. Trovare quoto e resto della divisione di $x^7+x^5+x^3+x$ per x^3-x+1.
18. Trovare quoto e resto della divisione di $x^7+x^5+x^3+x$ per $x^{13}-x+1$.
19. Trovare quoto e resto della divisione di $2x^6-x^5+2x^4+x^3+2x^2+x$ per $x^5+x^4-2x^2-2x$.
20. Trovare MCD e MCM di $x^3+2x^2-x-2, x^3-2x-1\in\mathbb{Q}[x]$
21. Trovare MCD e MCM di $x^3+2x^2-x-2, x^3-2x-1\in\mathbb{Z}_5[x]$
22. Trovare MCD e MCM al variare di $a\in\mathbb{Q}$ dei polinomi $-ax-a+x^2+x, 2x^2-3x+1\in\mathbb{Q}$.
23. Trovare MCD e MCM al variare di $a\in\mathbb{Q}$ dei polinomi $-ax-a+x^2+x, -a^2x+ax^2+a-x\in\mathbb{Q}$.
24. Trovare MCD e MCM al variare di $a\in\mathbb{Q}$ dei polinomi $x^2-a^2, -ax-a+2x^2+2x\in\mathbb{Z}_{11}$.

25. Trovare tutte le soluzioni di $x^2 = 0$ in $\mathbb{Z}_{900}$.

26. Trovare tutte le soluzioni di $x^3 = 0$ in $\mathbb{Z}_{72}$.

27. Trovare tutte le soluzioni di $x^5 + x^3 - 1 = 0$ in $\mathbb{Z}_{11}$.

28. Trovare tutte le soluzioni di $2x^5 - 11x^4 + 19x^3 - 17x^2 + 17x - 6 = 0$ in $\mathbb{Z}_{11}$.

29. Trovare tutte le soluzioni di $2x^5 - 11x^4 + 19x^3 - 17x^2 + 17x - 6 = 0$ in $\mathbb{Q}$.

30. Trovare tutte le soluzioni di $2x^5 - 11x^4 + 19x^3 - 17x^2 + 17x - 6 = 0$ in $\mathbb{Z}$.

31. Trovare se esiste un elemento di $\mathbb{Z}_{12}[x]$ di grado ≥ 1 invertibile.

32. Trovare se esiste un elemento di $\mathbb{Z}^*_{12}[x]$ di grado ≥ 1 nilpotente.

33. Trovare se esiste un elemento di $\mathbb{Z}^*_{12}[x]$ di grado ≥ 1 zerodivisore.

34. Lo stesso dei tre esercizi precedenti, ma con $\mathbb{Z}^*_{36}[x]$ al posto di $\mathbb{Z}^*_{12}[x]$.

35. Lo stesso dei tre esercizi precedenti, ma con $\mathbb{Z}^*_{15}[x]$ al posto di $\mathbb{Z}^*_{12}[x]$.

36. Trovare tutte le soluzioni di $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$ in $\mathbb{Q}[x]$. È vero che le soluzioni di $f(x) = 0$ sono le stesse in $\mathbb{Z}_{13}$? In che senso sono le stesse?

37. Trovare un corpo K tale che x^2+x+11 abbia soluzioni in $K[x]$. Descrivere il metodo usato.

38. Trovare una soluzione in $\mathbb{Q}[x]$ dell'equazione $F(x^2 - 1) + G(x^2 + x - 2) = 3x^3 + 4x + 4$.

39. Trovare una soluzione in $\mathbb{Z}_3[x]$ dell'equazione $F(x^2 - 1) + G(x^2 + x - 2) = 3x^3 + 4x + 4$.

40. Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{Q}[x]$ e $\mathbb{Z}_{11}[x]$ dell'equazione dei due punti precedenti.

41. Per quali valori di $a \in \mathbb{Q}$ l' equazione $F(x + 1) + G(ax + 2a + x^2 + 2x) = 3x^3 + 4x + 4$ ammette soluzioni?

42. Scrivere un equazione diofantea in $\mathbb{Q}[x]$ che abbia come soluzioni $x^2 + 1$ e $2x^3 - x$.

43. Scrivere, se esiste, un equazione su $\mathbb{Q}[x]$ che abbia come soluzioni $x^2 + 1$ e $2x^3 - x$ e come termine noto 1.

Comunicare ogni errore a `caboara@dm.unipi.it`