Esercitazione scritta Corso di Algebra, Informatica

Programma corso A

6 Aprile 2005

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Valutazione ....

Esercizio 1

....
....
.... Voto ....

Esercizio 2

....
....
.... Voto ....

Esercizio 3

....
....
.... Voto ....

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 1 (11 punti)

1. Fattorizzare il polinomio $f(x) = x^6 - x^5 - 2x^4 - 2x^2 + 2x + 4$ in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$.
2. Fattorizzare $f(x)$ anche in $\mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_3[x]$.

Soluzione

1

$f(2) = f(-1) = 0 \Rightarrow (x-2) \mid f(x)$ e $(x+1) \mid f(x) \Rightarrow (x-2)(x+1) = (x^2 - x - 2) \mid f(x)$. Usando l'algoritmo di divisione, $f(x) = (x-2)(x+1)(x^4-2)$. Dato che 2 è primo e $2 \nmid 1, 2 \mid 2, 2^2 \nmid 2$ per il citerio di Esisenstein, $x^4 - 2$ è irriducibile su $\mathbb{Q}[x]$.
La fattorizzazione in $\mathbb{Q}[x]$ è quindi $(x-2)(x+1)(x^4-2)$.
Ma $x^4 - 2 = (x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2})$ in $\mathbb{R}[x]$ e $x^2 - 2 = (x + \sqrt[4]{2})(x - \sqrt[4]{2})$ in $\mathbb{R}[x]$. Il polinomio $x^2 + 2$ è irriducibile su $\mathbb{R}[x]$, inquanto dovrebbe fattorizzarsi in due fattori lineari, e quindi avere due radici in $\mathbb{R}$, ma questo è impossibile essendo somma di quadrati.
La fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$ è quindi $(x-2)(x+1)(x^2+2)(x+i\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})$.
Abbiamo che $x^2 + 2 = (x + i\sqrt[4]{2})(x - i\sqrt[4]{2})$ in $\mathbb{C}[x]$.
La fattorizzazione in $\mathbb{C}[x]$ è quindi
$(x-2)(x+1)(x+\sqrt[4]{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+i\sqrt[4]{2})(x-i\sqrt[4]{2})$.

2

In $\mathbb{Z}_2[x]$ abbiamo che $f(x) = x^6 - x^5$, essendo i coefficienti dei termini di grado inferiore a 5 multipli di 2 e quindi nulli. Quindi $f(x) = x^5(x-1)$ in $\mathbb{Z}_2[x]$.

In $\mathbb{Z}_3[x]$ abbiamo $f(2) = f(-1) = 0$, cosa che si poteva dedurre dalla fattorizzazione su $\mathbb{Q}[x]$. Quindi $f(x) = (x+2)(x-1)(x^4-2)$. Dato che $-1 = 2$ modulo 3, possiamo scrivere $f(x) = (x-1)^2(x^4-2)$. Proviamo a fattorizzare $x^4 - 2$. Vediamo che $f(0), f(1), f(2) \neq 0$, quindi $x^4 - 2$ non ha radici e quindi non ha fattori lineari in $\mathbb{Z}_3[x]$. Rimane la possibilità di due fattori di grado 2. Verifichiamo se esistono $a, b, A, B \in \mathbb{Z}_3$ tali che $x^4 - 2 = x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + Ax + B) = aAx^2 + ax^3 + Ax^3 + x^4 + bAx + aBx + bx^2 + Bx^2 + bB$. Risolviamo il sistema

$$\begin{array}{lcl}
1 & = & 1 \text{ Grado } 4 \\
A + a & = & 0 \text{ Grado } 3 \\
Aa + B + b & = & 0 \text{ Grado } 2 \\
aB + Ab & = & 0 \text{ Grado } 1 \\
bB & = & 1 \text{ Grado } 0
\end{array}$$

L'ultima equazione ci dà $b = 1, B = 1$ o $b = 2, B = 2$. Sosituendo la prima soluzioe troviamo $A + a = 0, Aa + 2 = 0$, cioè $A = -a, a^2 = 2$. La seconda equazion è impossibile in $\mathbb{Z}_3$. Sostitudendo la seconda soluzione troviamo $A + a = 0, Aa+1 = 0$, cioè $A = -a, a^2 = 1$. La seconda equazione ha le due soluzioni $a = 1, a = 2$. Le due soluzioni del sistema sono quindi $b = 2, B = 2, a = 1, A = 2$ e $b = 2, B = 2, a = 2, A = 1$. Quindi $x^4 - 2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + x + 2)$ in $\mathbb{Z}_3[x]$. La fattorizzazione in $\mathbb{Z}_3[x]$ è quindi $f(x) = (x - 1)^2(x^2 + 2x + 2)(x^2 + x + 2)$

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 2 (11 punti)

Sia S l'insieme dei polinomi a coefficienti reali che sono divisibili per $x-3$. Mostrare che S è un $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Soluzione

Basta dimostrare che $f(x), g(x) \in S \Rightarrow f(x)+g(x) \in S$ e $f(x) \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f(x) \in S$.

Vediamo la prima condizione. Abbiamo che $(x-3) \mid f(x)$ e $(x-3) \mid g(x)$. Esistono quindi $f'(x), g'(x) \in \mathbb{R}[x]$ tali che $f(x)=(x-3)f'(x)$ e $g(x)=(x-3)g'(x)$. Quindi $f(x)+g(x)=(x-3)f'(x)+(x-3)g'(x)=(x-3)(f'(x)+g'(x))$ è ancora divisibile per $x-3$ e quindi appartiene a S.

Vediamo la seconda condizione. Abbiamo che $(x-3) \mid f(x)$ e $(x-3) \mid g(x)$. Esiste quindi $f'(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che $f(x)=(x-3)f'(x)$. Quindi $\lambda f(x) = \lambda(x-3)f'(x)$ è ancora divisibile per $x-3$ e quindi appartiene a S.

Cognome .... **Nome** ....

Corso ....

Esercizio 3 (11 punti)
Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ che è data, nelle basi standard di $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^4$, dalla seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & 11 & 8 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e consideriamo poi i 4 vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Verificare che $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$.
b) Scrivere la matrice associata all'applicazione L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^5$ e alla base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$.
c) L'applicazione L è surgettiva ?

Soluzione

a)

Verifichiamo che i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 sono linearmente indipendenti verificando che il sistema $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = 0$, vale a dire il sistema

$$\begin{aligned} x + 2t &= 0 \\ 2x + 4y + 3z &= 0 \\ x + 4y + 3z &= 0 \\ y + 2t &= 0 \end{aligned}$$

ammette solo la soluzione nulla. Abbiamo quindi quattro vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$. Per un lemma visto a lezione, questi vettori generano tutto $\mathbb{R}^4$ e sono quindi una base di $\mathbb{R}^4$.

b)

Per avere la matrice associata all'applicazione L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^5$ e alla base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ dobbiamo conoscere le immagine della base canonica di $\mathbb{R}^5$ rispetto alla base B.

$$
\begin{aligned}
&\text{Ł}(e_1) = (1,6,5,1) = v_1 + v_2 = (1,1,0,0)_B\\
&\text{Ł}(e_2) = (3,9,6,0) = 3v_1 + v_3 = (3,0,1,0)_B\\
&\text{Ł}(e_3) = (4,11,7,0) = 4v_1 + v_3 = (4,0,1,0)_B\\
&\text{Ł}(e_4) = (0,8,8,2) = 2v_2 = (0,2,0,0)_B\\
&\text{Ł}(e_5) = (0,3,3,0) = v_3 = (0,0,1,0)_B
\end{aligned}
$$

La matrice cercata è quindi

$$
\begin{bmatrix}
1,3,4,0,0\\
1,0,0,2,0\\
0,1,1,0,1\\
0,0,0,0,0
\end{bmatrix}
$$

b)

Dato che l'ultima riga della matrice associata all'applicazione L rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^5$ e alla base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ e' nulla, non potremo mai avere nell'immagine vettori con ultima componente (in coordinate relative alla base B) non nulla. In particolare, v_4 non appartiene all'immagine di L, che quindi non ‘’e surgettiva.