Numeri Complessi

Definiamo un nuovo numero i dove $i^2 = -1$ e cerchiamo un campo che contenga tutti i numeri reali e il numero i. Dobbiamo per cominciare prendere tutte le espressioni $a + ib$ dove a e b sono numeri reali e di queste espressioni fare somme e prodotti nel modo usuale.

- $(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$
- $(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i(bc + ad)$

(abbiamo usato che $i \times i = -1$)

Ora verifichiamo che i numeri $a + ib$ diversi da zero hanno un inverso. Possiamo scrivere

$$1/(a + ib) = (a - ib)/(a + ib)(a - ib) = a/(a^2 + b^2) - ib/(a^2 + b^2)$$

Abbiamo trovato l'inverso. A questo punto è chiaro che l'insieme $\mathbf{C} = \{a + ib\}$ dove a, b sono numeri reali e $i^2 = -1$ è un campo con le operazioni definite. Possiamo pensare $\mathbf{C}$ come un piano cartesiamo dove a, b sono le coordinate cartesiane del punto $z = a + ib$.

Per definire l'inverso di $z = a+ib$ abbiamo usato in numero $a-ib$ che è il simmetrico di z rispetto all'asse $\{b = 0\}$ che contiene tutti e soli i numeri reali. Questo punto simmetrico si chiama *coniugato* di z e si indicacon $\overline{z}$.

Sempre usando la rappresentazione piana non è difficile convincersi che la somma di due numeri complessi si fa con la *regola del parallelogramma*: ossia, se consideriamo il parallelogramma con un vertice in 0, uno in z e uno in z', il suo quarto vertice è proprio $z + z'$. È meno facile dare una rappresentazione geometrica del prodotto. Per ottenerla usiamo le *coordinate polari* nel piano. Osserviamo che il numero $a^2 + b^2 = z\overline{z}$ è il quadrato dell'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti i numeri reali positivi $|a|$ e $|b|$, dunque è il quadrato della distanza di $z = a + ib$ da 0. Allora le coordinate polari r, θ del punto $z = a + ib$ verificano le seguenti relazioni

$$a = r\cos\theta, b = r\text{sen}\theta,$$

ovvero

$$z = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$$

Se scriviamo il prodotto zz' di due numeri complessi in forma trigonometrica, $z = r(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha), z' = r'(\cos\beta + i\text{sen}\beta)$ otteniamo

$$zz' = rr'(\text{cos}\alpha\text{cos}\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta) + i(\text{sen}\alpha\text{cos}\beta + \text{cos}\alpha\text{sen}\beta)$$

Usando le formule di addizione

$$\text{cos}\alpha\text{cos}\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta = \cos(\alpha+\beta),$$

$$\text{sen}\alpha\text{cos}\beta + \text{cos}\alpha\text{sen}\beta = \text{sen}(\alpha+\beta)$$

otteniamo

$$zz' = rr'(\cos(\alpha+\beta) + i\text{sen}(\alpha+\beta)$$

Le coordinate polari (r, θ) di un numero complesso sono dette rispettivamente *modulo* e *argomento* del numero.

Abbiamo provato che la moltiplicazione per un numero complesso di modulo r e argomento θ agisce come una dilatazione di rapporto r e una rotazione attorno a 0 di θ.
In particolare:
- Se $z = r(\text{cos}\alpha + i\text{sen}\alpha)$ allora $z^n = r^n(\text{cos}n\alpha + i\text{sen}n\alpha)$
- Se $z^n = w = R(\text{cos}\beta + i\text{sen}\beta)$ allora si deve avere $r^n = R$ e $n\alpha = \beta(\text{mod}2\pi)$.

Ora calcoliamo tutte le soluzioni delle due equazioni precedenti in r e α. Per cominciare r deve essere la radice $n-$ esima positiva del numero reale positivo R. Una soluzione della seconda equazione è $\alpha = \beta/n$, ma non è la sola. Se sommiamo a β/n un multiplo intero di $2\pi/n$ otteniamo un'altra soluzione. Ci sono esattamente n multipli interi di $2\pi/n$ che danno soluzioni distinte e sono ottenute moltiplicando $2\pi/n$ per $0, 1, 2, \ldots, n-1$ e poi sommando con β/n .
Abbiamo dimostrato il seguente
Teorema del poligono regolare Le radici $n-$ esime di un numero complesso $w \neq 0$ (di modulo R e argomento β) sono i vertici di un $n-$ agono regolare iscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio la radice $n-$esima del modulo R di w, a partire dal vertice di argomento β/n.
Esempio: Calcoliamo le radici quarte di -1.
Il modulo di -1 è 1, l'argomento è π. Per il teorema del poligono regolare, le radici quarte di -1 sono i vertici di un quadrato iscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio 1 con argomenti $\pi/4, \pi/4 + 2\pi/4 = 3/4\pi, 5/4\pi, 7/4\pi$. Si tratta quindi dei numeri complessi:

$$\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$$

Applicazione: fattorizziamo il polinomio $x^4 + 1$.
Conosciamo le sue 4 radici complesse. Dumque, come polinomio a coefficienti complessi si spezza in 4 fattori di grado 1. Indicando le sue radici con z_0, z_1, z_2, Z_3 si ha:

$$x^4 + 1 = (x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$$

Osserviamo ora che $z_3 = \overline{z_0}$ e $z_2 = \overline{z_1}$. Osserviamo anche che in generale, se z è un numero complesso non reale, il polinomio $p(x) = (x - z)(x - \overline{z})$ è un polinomio di secondo grado a coefficienti reali. Infatti $p(x) = x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z}$. Il coefficiente $z + \overline{z}$ è reale perché la parte immaginaria si annulla e anche è reale $z\overline{z}$ che è il quadrato del modulo di z.
Applicando questo fatto e sostituendo al posto di z e $\overline{z}$ una una coppia di radici coniugate otteniamo per $x^4 + 1$ la fattorizzazione reale

$$x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$