(Parte della) esercitazione del 27 aprile 2010

1. Ripasso sulle applicazioni lineari

Definizione 1.1. Siano V e W spazi vettoriali sul campo K. Una applicazione lineare L da V a W è una funzione

$$L : V \to W$$

che soddisfa le seguenti due proprietà:

(1) per ogni $v_1, v_2 \in V$ vale $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$;
(2) per ogni $\lambda \in K$ e per ogni $v \in V$ vale $L(\lambda v) = \lambda L(v)$.

Osservazione 1.2. Le due proprietà della definizione possono essere espresse in maniera equivalente dalla seguente richiesta: per ogni $v_1, v_2 \in V$ e per ogni $a, b \in K$ vale

$$L(av_1 + bv_2) = aL(v_1) + bL(v_2)$$

Consideriamo ora una applicazione lineare:

$$L : V \to W$$

e prendiamo in V una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e in W una base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$.
Dato un elemento $v \in V$, proviamo a scrivere la sua immagine $L(v)$. Sappiamo che v si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base scelta:

$$v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$$

Per la linearità di L allora:

$$L(v) = a_1L(e_1) + a_2L(e_2) + \cdots + a_nL(e_n)$$

Dunque, per conoscere L, ossia per saper dire qual è l'immagine di un qualsiasi elemento $v \in V$, basta conoscere $L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)$.

Per poter descrivere $L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)$, che sono vettori di W, possiamo servirci della base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$: per ogni i, $L(e_i)$ si può scrivere in modo unico come

$$L(e_i) = a_{1i}\epsilon_1 + a_{2i}\epsilon_2 + \cdots + a_{mi}\epsilon_m$$

Ecco che entrano in scena le matrici.

Definizione 1.3. La matrice associata all'applicazione lineare L nelle basi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$ è data dalla seguente griglia di m righe per n colonne:

$$[L]_{\substack{e_1, e_2, \dots, e_n \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

che si può anche scrivere sinteticamente come:

$$[L]_{\substack{e_1, e_2, \dots, e_n \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m}} = (a_{ij})_{\substack{i = 1, 2, 3, \dots, n \\ j = 1, 2, 3, \dots, m}}$$

Notiamo che la matrice $[L]$ (da ora in poi, per semplificare la notazione, ometteremo il riferimento alle basi tutte le volte che questo non creerà ambiguità) si ottiene ponendo uno accanto all'altro i vettori $L(e_1), L(e_2), \dots, L(e_n)$, scritti come vettori colonna nella base scelta di W. Dunque guardando la matrice possiamo sapere tutto quello che ci serve sull'applicazione lineare L.
Applichiamo ciò che abbiamo detto fin qui al calcolo di $L(v)$ dove, come prima, $v \in V$ e

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$$

Allora

$$L(v) = a_1 L(e_1) + a_2 L(e_2) + \cdots + a_n L(e_n)$$

ossia

$$L(v) = a_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \dots \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + a_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ribadiamo che i vettori che compaiono nella espressione scritta qui sopra sono i vettori colonna della matrice $[L]$, e che stiamo considerando lo spazio W munito della sua base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_m\}$. Per esempio il vettore colonna

$$\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \dots \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

rappresenta l'elemento

$$L(e_n) = a_{1n}\epsilon_1 + a_{2n}\epsilon_2 + \cdots + a_{mn}\epsilon_m$$

Possiamo allo stesso modo rappresentare i vettori di V come vettori colonna relativamente alla base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$; in tal modo allora per esempio il nostro v si scrive:

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Ricordando il prodotto "righe per colonne" di cui abbiamo parlato in classe (e che qui non ridefiniamo), possiamo anche scrivere così:

$$L(v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Dunque la matrice $[L]$, mediante il prodotto righe per colonne, ci permette di calcolare come agisce la applicazione L sui vettori di V.

2. Esempio di matrici diverse associate (rispetto a basi diverse) alla stessa applicazione lineare

Facciamo ora un esempio che mostra come la matrice associata ad una applicazione lineare dipenda dalle basi scelte. Consideriamo gli spazi vettoriali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ con le loro basi standard, rispettivamente

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo poi la applicazione lineare

$$L \,:\, \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$$

così definita (sappiamo, per quanto osservato sopra, che per definire una applicazione lineare basta dare il suo valore sugli elementi di una base):

$$L(e_1) = 2\epsilon_1 + \sqrt{3}\epsilon_2$$
$$L(e_2) = 3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$
$$L(e_3) = \epsilon_1 + 7\epsilon_2 + 8\epsilon_3$$
$$L(e_4) = 2\epsilon_2 + 4\epsilon_3$$

Come sappiamo, a questa applicazione corrisponde la seguente matrice relativamente alle basi standard:

$$[L]_{\substack{e_1, e_2, e_3, e_4 \\ \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Dunque, preso per esempio il vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(scritto rispetto alla base standard) per calcolare $L(v)$ basta fare il prodotto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

che dà come risultato

$$L(v) = \begin{pmatrix} 11 \\ \sqrt{3} + 31 \\ 42 \end{pmatrix}$$

che è un vettore di $\mathbb{R}^3$ scritto nella base standard.

Supponiamo ora di voler cambiare le basi. Prendiamo allora in $\mathbb{R}^4$ la nuova base (verificare che si tratta davvero di una base !):

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e in $\mathbb{R}^3$ la nuova base (anche qui verificare !):

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Proviamo a scrivere la matrice

$$[L]_{\substack{v_1, v_2, v_3, v_4 \\ w_1, w_2, w_3}}$$

che rappresenterà la solita applicazione lineare L (ma sarà diversa dalla matrice trovata prima, relativa alle basi standard).

Nella prima colonna della matrice che stiamo per costruire, dovremo mettere il vettore $L(v_1)$ scritto in termini della base $\{w_1, w_2, w_3\}$. Calcoliamolo, facendo in un primo tempo riferimento alle basi standard (d'altra parte la nostra L la abbiamo definita tramite le basi standard, dunque non possiamo far altro che ripartire da quella definizione).

$$L(v_1) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{3} + 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fin qui questo vettore è scritto ancora in termini della base standard di $\mathbb{R}^3$. Ora lo esprimiamo in termini della base $\{w_1, w_2, w_3\}$. Si verifica che risulta

$$\begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{3} + 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (4 - \sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (\sqrt{3} + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$L(v_1) = (4 - \sqrt{3})w_1 + (\sqrt{3} + 1)w_2 - 2w_3$$

Allora il vettore da inserire come prima colonna della matrice

$$[L]_{\substack{v_1, v_2, v_3, v_4 \\ w_1, w_2, w_3}}$$

è

$$\begin{pmatrix} 4-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Procedendo allo stesso modo per le altre colonne si ottiene (verificare!):

$$[L]_{\substack{v_1, v_2, v_3, v_4 \\ w_1, w_2, w_3}} = \begin{pmatrix} 4-\sqrt{3} & -4 & -8 & -2 \\ \sqrt{3}+1 & 8 & 9 & 2 \\ -2 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2} & 2 \end{pmatrix}$$